UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ENERGÉTICA Y FLUIDOMECÁNICA

CARACTERIZACIÓN NUMÉRICA DE LA TURBULENCIA EN LA ESTELA DE UNA AEROTURBINA MEDIANTE UN MODELO DE SIMULACIÓN DE GRANDES ESCALAS

TESIS DOCTORAL

ÁNGEL JIMÉNEZ ÁLVARO
Ingeniero Industrial por la Universidad Politécnica de Madrid

Dirección:

ANTONIO CRESPO MARTÍNEZ
PhD. por California Institue of Technology
Doctor Ingeniero Aeronáutico por la Universidad Politécnica de Madrid
Catedrático de Mecánica de Fluidos

2007

TRIBUNAL

nombrado por el Magfco. y Excmo. Sr. Rector de la Universidad Politécnica de Madrid, el dia x de x de 2007

Presidente:

Vocal:

Vocal:

Vocal:

Secretario

Suplente:

Suplente:

Realizado el acto de defensa y lectura de la Tesis el día x x de x de 2007, en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales.

CALIFICACIÓN .....

EL PRESIDENTE LOS VOCALES

EL SECRETARIO

La naturaleza nos da el germen de la ciencia, pero no la ciencia.
Ésta debemos procurárnosla con el estudio.

Lucio Anneo Séneca (Córdoba, 4 a.C. − Roma, 65 d.C.)

AGRADECIMIENTOS

Ante todo quiero manifestar mi profundo agradecimiento al director de la presente Tesis doctoral, el profesor Antonio Crespo Martínez, Catedrático de Mecánica de Fluidos. No sólo le debo la oportunidad brindada en el momento de empezar el camino del doctorado, sino también los ánimos y palabras de aliento que hicieron que finalmente me embarcara en esta aventura. Sin su inestimable ayuda y constante interés no habría sido posible la elaboración de esta Tesis. Haber trabajado con el Profesor Crespo durante estos años, ha constituido un auténtico privilegio, por lo que no puedo dejar escapar la ocasión para expresarle mi más sincera admiración.

Igualmente quiero expresar agradecimiento a mi compañero más cercano, Emilio, con quien he compartido despacho y compañía durante estos años. A su vez, quiero agradecer la acogida ofrecida por todo el equipo del Laboratorio de Mecánica de Fluidos, en especial Javier García, Javier Jiménez, Fenando Manuel, Alexandre Araujo, Andrés Granados y Fermín Moreno. También merece mi agradecimiento María Jesús por su paciencia resolviendo las dudas respecto a temas burocráticos.

No quiero dejar pasar la ocasión para agradecer al Profesor P. Moin, de la Universidad de Stanford, California, la oportunidad de trabajar unos meses durante el verano de 2005 en el Center for Turbulence Research. Además deseo expresar mi reconocimiento al Profesor Juan José Alonso, quien me acogió y ayudó de forma especialmente cercana durante aquéllos meses apasionantes.

Asimismo quiero agradecer la cercanía y apoyo de los compañeros de viaje, Jaime, Juan Luís y María José. Nadie como ellos puede comprender los vaivenes del estado de ánimo en relación con el doctorado, pues inevitablemente todos pasamos por los mismos lugares comunes.

Sin embargo, los apoyos más importantes que he recibido durante este tiempo no proceden del mundo académico sino de la propia familia. Mis padres José María y Conchi, con sus desvelos constantes, su cariño incondicional y su interés e insistencia por compartir conmigo los momentos, unas veces más dulces, otras más amargos, han hecho posible que hoy pueda finalmente escribir estas líneas. Gracias. Sin vosotros, seguramente habría tirado la toalla a mitad de camino. Igualmente quiero dar las gracias a mis hermanos Sara y David. También a Sandra; aunque aquello queda hoy lejano, su apoyo emocional fue muy importante para mí en algunos días difíciles pasados lejos de casa.

RESUMEN

Las estelas de aeroturbinas son un interesante tema de estudio. El defecto de momento y el incremento en el nivel de turbulencia creado por las máquinas en un parque eólico suele causar una reducción en la potencia generada y cargas transitorias en otras turbinas. En parques en que, por escasez de espacio, el aumento de los costes de obra civil, etc., los aerogeneradores se sitúan demasiado cerca unos de otros, la intensidad de turbulencia puede crecer lo suficiente como para causar en algunos de ellos un daño considerable debido a las cargas dinámicas y al fenómeno de fatiga.

La presente Tesis Doctoral tiene como objetivo caracterizar la turbulencia en la estela de una aeroturbina a través de simulación numérica. Lo novedoso de la metodología desarrollada es la utilización de la técnica conocida como *Simulación de Grandes Escalas* (normalmente conocido por sus siglas en inglés LES, de Large–Eddy Simulation). LES proporciona una solución del campo fluido tridimensional y no estacionaria, resolviendo físicamente la turbulencia a excepción de las pequeñas escalas que son modelizadas. Los modelos existentes hasta la fecha utilizan un cierre de las ecuaciones de tipo RANS estableciendo un promedio de Reynolds sobre todas las escalas turbulentas, de manera que sólo proporcionan información sobre los valores medios de las magnitudes fluidas. Los recursos computacionales requeridos por la simulación LES son mayores que los de los modelos RANS pero muy razonables y al alcance de cualquiera.

Uno de los objetivos de importancia de la Tesis es la simulación numérica de la estela en condiciones que reproduzcan la turbulencia ambiente atmosférica. Las propiedades de la turbulencia del viento son bien conocidas,

pero difícilmente reproducibles. Una gran parte del trabajo realizado ha estado encaminado a la obtención de un viento numérico con propiedades turbulentas próximas a las del flujo atmosférico.

El paso siguiente es la introducción de un modelo simplificado de aeroturbina, que se engloba dentro del grupo de modelos del tipo de disco actuador. La turbina se representa a través de una serie de fuerzas de volumen introducidas en cierta selección de celdas de la malla.

La simulación de grandes escalas permite obtener las propiedades fluidas en el seno de la estela, en particular los defectos de velocidad y las componentes del tensor de Reynolds, relacionadas con la intensidad de turbulencia en las tres direcciones del espacio y con los esfuerzos turbulentos de cortadura. Con el objeto de validar los métodos empleados, los resultados de la simulación de la estela son comparados con datos experimentales obtenidos en parques eólicos existentes en la actualidad y también con ciertas correlaciones analíticas propuestas previamente por diversos autores. La capacidad de LES ha permitido además reproducir ciertas propiedades de la turbulencia a las que no es posible llegar con los modelos de tipo RANS. Se han calculado los espectros de densidad de potencia y de coherencia espacial, que han sido comparados también con datos experimentales de este tipo.

ABSTRACT

Wind turbine wakes are an interesting topic of study. Velocity defects and the increase of turbulence generated by the turbines in a wind farm usually cause a reduction in power generation and unsteady loads over other machines. In wind farms where, because of shortage of space, high cost of civil works, etc., the wind turbines are placed too close ones to the others, turbulence intensity may increase sufficiently to cause measurable damage due to fatigue and dynamic loads on some of them.

The objective of this Thesis research is to characterize the turbulence in a wind turbine wake with numerical simulation. What is new in the developed methodology is the use of the technique known as Large–Eddy Simulation (LES). LES provides a three–dimensional and unsteady solution of fluid flow resolving turbulence physically except the smallest scales, which are modelled. The current models use a RANS closure method based in a Reynolds average over all scales of turbulence, so they provide information only about the average value of flow magnitudes. The computational resources required by LES are higher than RANS's ones, but very reasonable.

One of the important goals of the Thesis is to perform the numerical simulation of the wake reproducing the atmospheric environmental turbulence. The turbulent properties of wind are well known but hardly reproducible. A big part of the work done has been focused on obtaining a numerical wind with similar turbulent properties to the ones of the atmospheric flow.

Next step is to introduce a simplified model of wind turbine, that can be included in the sort of models known as actuator disk models. Wind turbine is then represented as a set of body forces placed in some selected grid cells.

LES allows us to obtain the flow properties inside the wake, particularly the velocity defects and the components of the Reynolds stress tensor, related to the turbulence intensities in the three spatial directions and with turbulent shear stresses. In order to validate the methodology, the results of the wake simulation are compared with experimental data obtained in existing wind farms and with analytical correlations previously proposed by some authors. LES potentiality permits as well to reproduce some turbulence properties that are impossible to get with RANS type models. Power density and spatial coherence spectra have been calculated and compared with experimental data of this kind.

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS ..... **vii**

RESUMEN ..... **ix**

ABSTRACT ..... **xi**

ÍNDICE ..... **xiii**

1. INTRODUCCIÓN **1**

1.1. SITUACIÓN ACTUAL DE LA ENERGÍA EÓLICA **1**

1.1.1. LA ENERGÍA EÓLICA EN EL MUNDO 1

1.1.2. LA ENERGÍA EÓLICA EN ESPAÑA 3

1.2. TEMA DE LA TESIS **4**

1.3. ESTADO DEL ARTE **5**

1.3.1. DESCRIPCIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE LA ESTELA 6

1.3.2. MODELOS CINEMÁTICOS 8

1.3.3. MODELOS DE CAMPO 10

1.3.4. ANISOTROPÍA 15

1.3.5. ESTABILIDAD ATMOSFÉRICA 16

1.3.6. COHERENCIA ESPECTRAL 17

1.3.7. SERPENTEO DE LA ESTELA 17

1.4. OBJETIVO DE LA TESIS **18**

2. SIMULACIÓN DE GRANDES ESCALAS..... 21

2.1. IDEA Y OBJETIVO..... 21

2.2. FILTRADO.....22

2.3. LAS ECUACIONES DE CONTINUDAD Y NAVIER-STOKES FILTRADAS.....24

2.4. VISCOSIDAD TURBULENTA.....26

2.5. MODELOS DE SUBESCALA.....27

2.5.1. EL MODELO DE SMAGORINSKY..... 27

2.5.2. EL MODELO DINÁMICO..... 29

2.6. MODELOS DE SIMILARIDAD DE ESCALA.....32

2.7. MODELOS DE VISCOSIDAD TURBULENTA AVANZADOS..... 33

3. MÉTODOS NUMÉRICOS..... 35

3.1. IMPORTANCIA DE LA ELECCIÓN DEL MÉTODO NUMÉRICO..... 35

3.2. ECUACIONES GOVERNANTES..... 36

3.3. ECUACIONES DE CONSERVACIÓN..... 37

3.4. MALLADO ESCALONADO.....38

3.5. NOTACIÓN.....40

3.6. LAS ECUACIONES DISCRETIZADAS..... 42

3.6.1. PROPIEDADES CONSERVATIVAS DE LAS ECUACIONES DISCRETAS..... 43

3.6.2. MALLAS DE ESPACIADO NO UNIFORME..... 44

3.7. CÁLCULO DE LA VISCOSIDAD TURBULENTA.....45

3.8. EL ESQUEMA ITERATIVO SEMI-IMPLÍCITO.....46

4. MODELO DE FLUJO..... 51

4.1. FLUJO INCIDENTE SOBRE LA TURBINA..... 51

4.1.1. DOMINIO DE CÁLCULO..... 52

4.1.2. CONDICIONES DE CONTORNO.....53

4.1.2.1. Condiciones de contorno en la entrada y salida del dominio..... 53
4.1.2.2. Condición de contorno en los bordes inferior y superior del recinto..... 56
4.1.2.3. Condiciones de contorno en las caras laterales del dominio..... 59

4.2. MODELO DE TURBINA.....59

5. VALORES TURBULENTOS MEDIOS EN ESTELA..... 63

5.1. CONSIDERACINES GENERALES..... 63

5.2. RESULTADOS Y COMPARACIÓN CON DATOS EXPERIMENTALES.....64

5.2.1. COMPARACIÓN DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL FLUJO INCIDENTE SOBRE LA TURBINA CON LAS DEL VIENTO ATMOSFÉRICO..... 65
5.2.2. VISIÓN GENERAL DEL COMPORTAMIENTO DE LA ESTELA..... 69
5.2.3. COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS DE ESTELA..... 75

5.3. COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS CON CORRELACIONES ANALÍTICAS.....83

5.3.1. ESTELA CERCANA..... 83
5.3.2. ESTELA LEJANA..... 87

6. ANÁLISIS ESPECTRAL.....89

6.1. DENSIDAD ESPECTRAL DE ENERGÍA Y ESPECTRO CRUZADO DE SERIES TEMPORALES..... 89

6.1.1. DENSIDAD ESPECTRAL DE ENERGÍA..... 89
6.1.1.1. Series temporales continuas..... 89
6.1.1.2. Series temporales finitas.....91
6.1.1.3. Series temporales discretas..... 92
6.1.2. ESPECTRO CRUZADO..... 95
6.1.2.1. Series temporales continuas..... 95
6.1.2.2. Series temporales finitas..... 96
6.1.2.3. Series temporales discretas.....97
6.1.3. COHERENCIA ESPECTRAL.....97

6.1.3.1. Series temporales continuas..... 97
6.1.3.2. Series temporales finitas.....98
6.1.3.3. Series temporales discretas..... 99

6.2. RESULTADOS Y COMPARACIÓN CON DATOS EXPERIMENTALES..... 100
6.2.1. DATOS EXPERIMENTALES..... 100
6.2.2. MODELOS ANALÍTICOS PARA LA COHERENCIA ESPACIAL..... 102
6.2.2.1. Modelo de Panofsky−Dutton..... 102
6.2.2.2. Modelo IEC 61400−1..... 102
6.2.3. RESULTADOS NUMÉRICOS OBTENIDOS DE LA SIMULACIÓN DE GRANDES ESCALAS..... 103
6.2.3.1. Resultados de la densidad espectral de energía..... 104
6.2.3.2. Resultados de la coherencia espectral..... 112

7. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO..... 125

7.1. CONCLUSIONES..... 125

7.2. TRABAJO FUTURO..... 128

APÉNDICE A: TRANSFORMACIONES DE FOURIER..... 131

A.1. TRANSFORMACIÓN INTEGRAL DE FOURIER..... 131

A.2. FILTROS..... 137

A.3. TRANSFORMACIÓN DISCRETA DE FOURIER..... 139

APÉNDICE B: MÉTODOS ESPECTRALES PARA LA ECUACIÓN DE POISSON..... 145

B.1. ECUACIÓN DE POISSON DISCRETA..... 145

B.2. TRANSFORMADA DE FOURIER..... 145

B.3. OBTENCIÓN DE LA SOLUCIÓN MEDIANTE SISTEMAS TRIDIAGONALES..... 146

B.4. MÉTODO DE RESOLUCIÓN..... 148

REFERENCIAS..... 149

LISTA DE SÍMBOLOS..... 159

LISTA DE FIGURAS.....167

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 SITUACIÓN ACTUAL DE LA ENERGÍA EÓLICA

1.1.1 LA ENERGÍA EÓLICA EN EL MUNDO

La energía eólica ha alcanzado actualmente un nivel de desarrollo que permite afirmar que nos encontramos ante una fuente energética limpia, económicamente rentable y con una tecnología de aprovechamiento madura. Los actuales aerogeneradores son capaces de producir electricidad de forma no contaminante, partiendo de recursos naturales y renovables, a precios competitivos con las fuentes energéticas tradicionales.

El impulso a la expansión de la energía eólica ha venido motivado en gran medida, por la urgente necesidad de combatir el cambio climático global. Según las cifras de la ONU, se prevé que la temperatura media de la superficie del planeta aumente entre 1,4 y 5,8 ºC de media (en algunos puntos podrían existir incrementos aún mayores) de aquí a 2100, a pesar de que los inviernos son más fríos y violentos en muchos lugares. Hoy día no se pone ya en duda en los círculos científicos que este fenómeno es de carácter antropogénico y que su base es el llamado "efecto invernadero" provocado por la acumulación ciertos gases, fundamentalmente CO_2 en la atmósfera. La preocupación de los gobiernos del mundo desarrollado se plasmó el 11 de diciembre de 1997, fecha en que los países industrializados se comprometieron, en la ciudad de Kioto, a ejecutar un conjunto de medidas para reducir las emisiones de gases de efecto

invernadero. Los gobiernos signatarios pactaron reducir en un 5,2% de media las emisiones contaminantes entre 2008 y 2012, tomando como referencia los niveles de 1990. El acuerdo entró en vigor el 16 de febrero de 2005, después de la ratificación por parte de Rusia el 18 de noviembre de 2004. En este contexto, proliferan en Europa las medidas destinadas a fomentar las energías renovables, y muy en particular la energía eólica, que ha demostrado haber alcanzado ya un notable nivel de madurez tecnológica. La energía generada por las plantas eólicas en el año 2006 ha evitado la emisión de unos 150 millones de toneladas de CO_2, que se habrían lanzado a la atmósfera si esta energía se hubiera producido en centrales térmicas de carbón, gas o fuel. La instalación de plantas eólicas va a contribuir al cumplimiento de los compromisos derivados del Protocolo de Kioto y, por ello, el desarrollo de la energía eólica es ampliamente aceptado por la sociedad.

Por otro lado, a medida que se ha ido desarrollando el mercado, los costes de la energía eólica se han reducido drásticamente. El coste de producción del kWh eólico es hoy en día una quinta parte de lo que costaba hace 20 años. Los costes *ex-factory* de los aerogeneradores se sitúan en el rango de los 600 a 700 €/kW, variando en función de la tecnología y el tamaño de la máquina. Los precios por kW instalado se mueven en la banda de los 900 a 1.100 €/kW. Finalmente, los costes de generación varían entre los 4 a 8 céntimos de euro por kWh producido, siendo este amplio margen consecuencia en parte de las diferencias en el tamaño del proyecto (lo que generalmente lleva a diferentes costes específicos de la instalación), aunque fundamentalmente es debido a las características de viento del emplazamiento.

La situación descrita anteriormente hace que no resulte sorprendente que la energía eólica haya experimentado un crecimiento elevadísimo en las últimas décadas. La energía eólica se ha erigido como la fuente energética de crecimiento mundial más rápido en los últimos años. El mercado de la energía eólica es un mercado joven que se está desarrollando con una tasa anual de crecimiento en torno al 30% (el 25,3% en el año 2006), habiendo pasado de los 2,5 GW instalados existentes en el año 1992 a 73,9 GW a finales de 2006. Los aerogeneradores de todo el mundo han proporcionado en 2006 energía suficiente para satisfacer las necesidades de unos 42 millones de hogares, más de 100 millones de personas. Diferentes países han emprendido una línea clara de apuesta por el uso de la energía eólica en sus sistemas de producción energética, como es el caso de Alemania con 20,6 GW en operación, España con 11,6 GW, EE.UU. con 11,6 GW, India con 6,3 GW y Dinamarca, que con

3,1 GW instalados, produjo en el año 2006 el 18,5% de la energía eléctrica consumida en el país (datos a finales de 2006, fuente: Word Wind Energy Association). La WWEA estima que para el año 2010 habrá 160 GW instalados en todo el mundo. Estos datos son claros ejemplos de la potencialidad de la energía eólica.

Los fabricantes europeos lideran el mercado mundial con Dinamarca, Alemania y España, como países que aportan el mayor número de aerogeneradores al mercado. El empleo asociado en el sector de la energía eólica ha crecido rápidamente, y en la actualidad en Europa se estima en más de 85.000 puestos de trabajos incluyendo el empleo directo e indirecto. Las predicciones apuntan a más de 200.000 puestos de trabajo para el año 2020.

La energía eólica es una de las opciones energéticas emergentes con mayor potencialidad en el futuro, llamada a contribuir de forma importante a cubrir las elevadas necesidades energéticas también en los países en vía de desarrollo, así como a sustituir una parte importante de las actuales plantas energéticas alimentadas por combustibles fósiles en todo el mundo.

1.1.2 LA ENERGÍA EÓLICA EN ESPAÑA

En España continúa la exitosa incorporación de la energía eólica en la estructura energética del país, concretamente en la producción eléctrica. El mercado español sigue siendo uno de los primeros del mundo, con 1587 MW instalados a lo largo de 2006 y una potencia total a finales de ese año de 11615 MW, que le sitúa en segunda posición mundial detrás de Alemania y ligeramente por delante de EE.UU. El crecimiento de la potencia instalada de origen eólico es recibido con enorme satisfacción por la sociedad, que aprecia no sólo su beneficiosa contribución a la conservación y mejora del medio ambiente, sino así mismo su contribución al desarrollo industrial y a la creación de puestos de trabajo. Durante 2006 el viento ha supuesto la generación de 22198,67 GWh, un 6,48% más que en 2005, lo que ha llegado a cubrir casi el 9% de la demanda (exactamente el 8,8%). Estos datos adquieren si cabe aún más relevancia, teniendo en cuenta que 2006 ha sido un año considerablemente menos ventoso que el precedente. Por otra parte es significativo que en numerosas ocasiones la producción eólica ha superado el 25% de la cobertura de la demanda con una punta de producción de 8142 MW el 8 de diciembre, lo que supuso un 31% de la producción total en ese momento.

El actual gobierno anunció la revisión en 2005 del Plan Energético Nacional, y el nuevo objetivo para el sector eólico es alcanzar 20 GW instalados en 2010.

No solo España ocupa el segundo lugar en cuanto a potencia instalada en el mundo, sino que hoy en día nuestro país es el tercero en fabricación de aerogeneradores para el mercado mundial, con una cuota de mercado próxima al 14 % y con más de cuatrocientas empresas involucradas en el sector, con unos 14300 puestos de trabajo directos y 17100 indirectos(*).

1.2 TEMA DE LA TESIS

Los diversos subsistemas de los aerogeneradores están sujetos a cargas fluctuantes durante un número superior a 100 millones de ciclos en el total de su vida útil. El análisis del comportamiento a fatiga de los componentes de las aeroturbinas es de vital importancia para prever el daño que se pueda producir durante el tiempo en servicio de las máquinas.

Algunos de los parámetros que intervienen en la producción de cargas de fatiga en aeroturbinas son, entre otros, el carácter aleatorio del viento, cortadura del flujo eólico (variación de la velocidad del viento con la altura), cambios de dirección y el efecto de sombra del propio mástil, así como aspectos de carácter mecánico, tales como el peso de las palas o la inclinación del eje. También la geometría de los propios componentes estructurales puede generar esfuerzos de fatiga que llegan a ser críticos con determinadas combinaciones de cargas. El funcionamiento del sistema de control (arranques, paradas, regulación de potencia, sistema de orientación, etc.) influye igualmente en la aparición de cargas de fatiga. Sin embargo, el factor más determinante en cuanto a la reducción de vida útil de las aeroturbinas asociado a este tipo de esfuerzos fluctuantes es la turbulencia propia del viento incidente. Además, mientras que el resto de factores introducen cargas dinámicas de tipo cíclico, la naturaleza estocástica del viento hace mucho más difícil evaluar el efecto de la turbulencia si no se conoce una descripción adecuada de las componentes de la velocidad y de los esfuerzos de Reynolds tanto en el espacio físico como el plano de la frecuencia.

(*) Los datos manejados en este apartado proceden de la Asociación Empresarial Eólica.

Para que la explotación de la energía eólica sea rentable hay que buscar de forma adecuada el emplazamiento de las máquinas, identificando aquellos lugares con más potencial eólico y situando en ellos el mayor número posible de aerogeneradores. Ahora bien, debido al auge tan extraordinario que ha experimentado la energía eólica en los últimos años en el mundo y particularmente en España, los emplazamientos con mayor potencial empiezan a escasear. Unido esto a los costes de la tierra y de la obra civil, las aeroturbinas tienden a ser colocadas cerca unas de otras en los parques eólicos, creando efectos de interferencia. Las interacciones suelen ser importantes, ya que las máquinas instaladas en la actualidad tienen una potencia nominal típica de 500 a 2500 MW, con diámetros de 40 a 80 m, de manera que muy frecuentemente encontramos turbinas que distan entre sí menos de cinco veces su diámetro.

Consecuentemente, las estelas de aeroturbinas son una interesante materia de estudio, por dos razones fundamentalmente. El defecto de momento en la corriente que provoca una turbina puede causar una reducción considerable en la potencia generada en máquinas situadas aguas abajo. Por otro lado, el incremento en el nivel de turbulencia que sucede en las estelas puede acrecentar de forma importante las cargas transitorias en otras máquinas del parque eólico, ya que la intensidad de turbulencia en la estela es ciertamente mayor que en el viento libre. Es posible que una máquina que cumple con la normativa cuando actúa aislada deje de hacerlo si está sometida a la interferencia, por la mayor turbulencia que recibe. La turbulencia puede crecer en algunos parques eólicos por este efecto lo suficiente como para causar un daño significativo en algunas máquinas. Por tanto, el incremento en las cargas dinámicas y de fatiga debe ser tenido en cuenta de manera adecuada en el diseño de los componentes de la turbina, ver Frandsen y Thögersen [1999].

1.3 ESTADO DEL ARTE

Diferentes enfoques, revisados por Crespo *et al.* [1999] y Vermeer *et al.* [2003], han sido adoptados para estudiar estelas de aeroturbina. Antes de realizar un recorrido por los diferentes modelos propuestos, es de interés presentar una descripción general del comportamiento de la estela.

1.3.1 DESCRIPCIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE LA ESTELA

Atendiendo al comportamiento del flujo, podemos encontrar tres regiones diferenciadas en el seno de la estela. Se trata, de mayor a menor cercanía a la turbina, de las regiones de expansión, de estela cercana y de estela lejana.

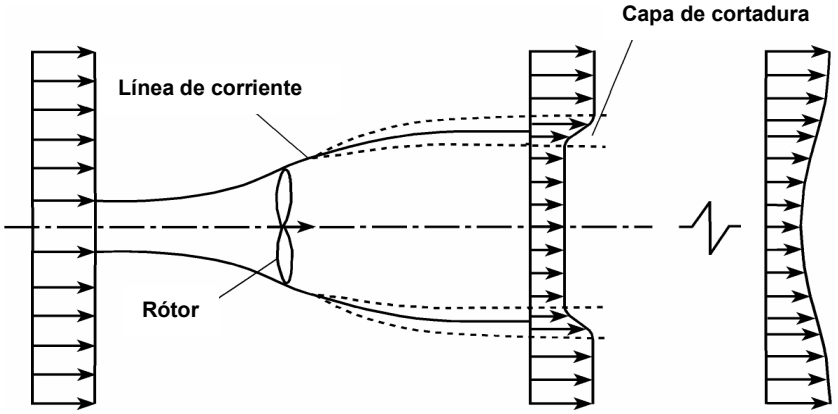

Figura 1.1. *Representación esquemática de una estela de aeroturbina*

Cuando el viento se aproxima a la aeroturbina, su velocidad decrece y la presión aumenta. Al cruzar el rótor se produce un descenso brusco de la presión. En la región inmediatamente posterior al rótor aparecen defectos de presión y velocidad no uniformes espacialmente (relacionados con el empuje axial sobre la máquina), así como una componente azimuthal de velocidad (relacionada con el par que ejerce la corriente sobre el rótor). Debido a la diferencia de circulación a lo largo de los perfiles aerodinámicos de las palas, se desprenden laminas de vórtices que se transportan una pequeña distancia aguas abajo, formando vórtices de punta que describen trayectorias helicoidales. Cuando la inclinación del ángulo de la hélice es suficientemente pequeña, los vórtices de punta pueden ser interpretados como una capa de cortadura cilíndrica que separa una región de movimiento lento en el interior de la estela de la región externa a la estela. El defecto de velocidad puede ser considerado entonces como inducido por los vórtices. La diferencia de presión existente entre ambas zonas (interna y externa a la estela) es soportada por la fuerza centrífuga que aparece debido a la curvatura de las líneas de corriente. Al desplazarnos aguas abajo, la capa de cortadura cilíndrica se expande, la

presión aumenta y la velocidad en el interior de la estela disminuye hasta alcanzarse la presión atmosférica (*Figura* 1.1). Por el efecto de difusión turbulenta, el grosor de la capa de cortadura se incrementa con la distancia al rótor, pero al ser la longitud de esta región de expansión pequeña, puede considerarse en cualquier caso que el grosor de la capa de cortadura es despreciable frente a su diámetro. La región de expansión termina a distancias del orden de un diámetro de la turbina.

Al alejarnos más, la difusión turbulenta de momento se convierte en el mecanismo dominante. La generación de turbulencia es especialmente importante en la capa de cortadura, donde los gradientes de velocidad son mayores. Numérica (Hernández y Crespo [1990], Crespo y Hernández [1993], Taylor [1993]) y experimentalmente (Alfredson *et al.* [1980], Green [1986], Papaconstantinou y Bergeles [1988], Högström *et al.* [1988], Højstrup [1990], Ainslie *et al.* [1990], Smith y Taylor [1991]) se ha observado claramente una zona con forma de anillo donde la intensidad de turbulencia es muy elevada. Existen también considerables gradientes de velocidad, tanto en el interior de la estela, ya que los defectos de velocidad creados por la turbina son no uniformes, como en el exterior de la misma, pues en el flujo atmosférico la velocidad varía con la distancia al suelo. En este punto, la gran mayoría de la turbulencia generada se crea por los efectos de cortadura, principalmente en la región de forma anular de elevado gradiente de velocidad. Sin embargo, sigue jugando un papel importante la cortadura atmosférica externa a la estela, al menos en la redistribución de la turbulencia generada. La difusión turbulenta continua haciendo crecer el grosor de la capa de cortadura al desplazarnos aguas abajo, hasta que a cierta distancia (de dos a cinco diámetros de la turbina) ésta alcanza el eje de la estela. Esto constituye el final de la región de estela cercana.

Tras la estela cercana encontramos una región de transición que lleva a la región de estela lejana. El ella, la estela está completamente desarrollada. Si no existiera la cortadura atmosférica, encontraríamos unos perfiles de velocidad e intensidad de turbulencia axilsimétricos con una distribución autosemejante en cualquier sección longitudinal. Las únicas propiedades generales de la turbina que aparecerían como parámetros en estos perfiles son el empuje ejercido y la totalidad de la energía cinética turbulenta generada por el propio rótor. Esta propiedad de autosemejanza es la base de los modelos cinemáticas de estelas que veremos después. Sin embargo, la presencia del suelo y la cortadura del flujo invalidan la hipótesis de simetría axial y en cierta

medida también la de autosemejanza. Se ha observado tanto numérica como experimentalmente que la máxima intensidad de turbulencia en la estela lejana esta localizado por encima del eje de la turbina.

1.3.2 MODELOS CINEMÁTICOS

Como se ha mencionado, los modelos cinemáticos se basan en la propiedad de autosemejanza de los perfiles de velocidad en el seno de la estela lejana. La descripción que estos modelos hacen de la estela no considera la región de expansión y se dan diferentes tipos de perfiles para las regiones de estela cercana, estela lejana y zona de transición. Para la estela lejana, los perfiles son autosemejantes, mientras que en la estela cercana el modelo consiste en un núcleo de velocidad constante y radio decreciente, hasta que, cuando éste se hace cero, concluye esta región. Lissaman [1979] y Voutsinas *et al.* [1990] utilizan los perfiles propuestos por Abramovich [1963]. Vermeulen [1980] utiliza en un tipo de perfil Gaussiano muy psrecido al de Abramovich [1963]. Katic *et al.* [1986] simplificaron aún más el problema asumiendo un perfil de tipo *top-hat* en toda la estela. Más recientemente, Kiranoudis y Maroulis [1997] utilizaron un modelo cinemático similar a los anteriores estableciendo expresiones analíticas simples para estimar la perdida de producción de un parque eólico debida a las estelas.

En estos modelos, el defecto de velocidad inicial se obtiene normalmente del coeficiente de empuje de la máquina. Voutsinas *et al.* [1990] prefirieron relacionarlo con el coeficiente de potencia. La ventaja de hacer esto reside en que frecuentemente la curva de potencia de la turbina es más fácil de conseguir que la curva de empuje. Se basaron además en la conservación de masa en lugar de en la conservación global de momento, argumentando que el acuerdo con los resultados experimentales de Taylor [1990] era mejor. Sin embargo, no está claro cómo se tuvo en cuenta la entrada de masa a través de la superficie lateral de su volumen de control.

Según el enfoque de Lissaman [1979], el crecimiento de la estela está causado por la suma de la turbulencia ambiente y la turbulencia creada en la capa de cortadura en la estela. Vermeulen [1980] añadió un término más, la turbulencia creada por la propia turbina, aunque, en un trabajo posterior basado en la comparación con los datos experimentos de Taylor [1990], Voutsinas *et al.* [1990] concluyeron que estos efectos son despreciables. Por su parte, Katic *et al.* [1986] asumieron un crecimiento lineal de la estela con la

distancia, dejando la constante de proporcionalidad para ser ajustada de acuerdo a datos experimentales.

El efecto del suelo se simula mediante técnica de imágenes. Lissaman [1979] incluía una segunda turbina simétrica respecto de la primera, señalando que la superficie del suelo podría ser tratada exactamente como el plano de simetría entre ambas. Sin embargo el efecto real del suelo hace que, debido a la fricción, el arrastre total no se conserve. De acuerdo con el procedimiento de las imágenes el defecto de la velocidad en el suelo sería el doble que el debido a una sola turbina, mientras que en la realidad la presencia del suelo obliga a que la velocidad sea nula, y por tanto el defecto de velocidad debe anularse también. Para solucionar este problema, Crespo *et al.* [1985], Crespo y Hernández [1986] y Kambezidis *et al.* [1990] han utilizado una estela imagen antisimétrica, de tal manera que los defectos de velocidades asociado a la turbina real y la turbina imagen son sustraídos en lugar de sumados, lo que lleva a que se anulen en el plano del suelo. Sin embargo, no está claro que este procedimiento proporcione un resultado mejor en el resto del campo fluido, donde los efectos del suelo ya no juegan un papel importante. Otro procedimiento debido a Voutsinas *et al.* [1990] consiste en plantear una superposición de los cuadrados de los defectos de velocidades estimando la localización de la turbina imagen teniendo en cuenta la variación espacial de la velocidad del flujo incidente. Sin embargo, no parece que se sorteen todas las complicaciones de forma convincente. Por el contrario, el efecto del suelo se confirma como una dificultad inherente a todos los modelos cinemáticos que asumen simetría axial; no se ha encontrado una manera satisfactoria de resolverla. Sólo con modelos 3D se puede dar un tratamiento adecuado a este problema.

Más recientemente, Larsen *et al.* [1996] propusieron un modelo analítico sencillo, basado en la teoría clásica de estelas debida a Schlichting [1968]. El flujo es supuesto axil simétrico asumiéndose un perfil autosemejante en toda la estela. Si l es la distancia a la turbina, el defecto de velocidad decrece con $l^{-2/3}$, la intensidad de turbulencia decae con $l^{-1/3}$, como en Crespo y Hernández [1993] y [1996], y la anchura de la estela aumenta con $l^{1/3}$. En comparación con los modelos cinemáticos anteriores, este último sólo considera la región de estela lejana y la turbulencia generada por la cortadura.

A pesar de las dificultades anteriores, en muchos casos los modelos cinemáticos proporcionan resultados que presentan un buen acuerdo con las medidas experimentales si se escogen apropiadamente los valores de los

parámetros que aparecen en ellos (Alfredson *et al.* [1980], Faxen [1978], Vermeulen y Builtjes [1982]).

1.3.3 MODELOS DE CAMPO

Por su parte, los modelos de campo tratan de reproducir el comportamiento de la estela mediante la resolución de las ecuaciones de transporte de la mecánica de fluidos, en mayor o menor detalle, y con ciertas suposiciones y aproximaciones que buscan el equilibrio entre simplicidad y precisión en la descripción de los mecanismos físicos que intervienen.

Sforza *et al.* [1979] y [1980] describieron la estela utilizando sólo la ecuación de la conservación del momento en la dirección principal del flujo. Esta ecuación es linealizada utilizando una velocidad advectiva y una viscosidad turbulenta constantes. Utilizan una aproximación parabólica para resolver la ecuación. Para configuraciones bidimensionales obtuvieron soluciones analíticas aceptables. En el caso tridimensional, la integración de la ecuación fue realizada numéricamente mediante un método ADI (Alternating Direction Implicit). Calcularon los defectos de velocidad y el crecimiento de la estela y los compararon con experimentos a pequeña escala. Obtuvieron concordancias razonables teniendo en cuenta la simplicidad del modelo, aunque los errores para los casos con alto coeficiente de empuje eran algo mayores. De todos modos, las tendencias estaban bien predichas en todos los casos.

Otro modelo numérico basado en la resolución de las ecuaciones del flujo para estelas en una capa límite atmosférica neutra y estratificada fue propuesto por Taylor [1980]. Este autor consideró un esquema con cierre del tipo de gradiente de viscosidad turbulenta. El efecto de estela se considera suficientemente pequeño para linealizar las ecuaciones en torno al flujo básico y se utiliza una aproximación de capa límite. Se trata de un modelo bidimensional y fue aplicado a una serie de filas de turbinas. Si se toma una aproximación parabólica, las variaciones de presión a lo largo de la estela pueden ser despreciadas en la ecuación del momento para la dirección principal del flujo, pero no en las ecuaciones del momento en las direcciones transversales. Taylor [1980] comparó sus resultados con los de los modelos cinemáticos y con resultados experimentales debidos a Builtjes [1978]. Aunque existía un acuerdo razonable, Taylor admitía que la superposición lineal de los efectos de varias filas de turbinas podría conducir a un valor bajo o incluso

negativo para los resultados de la potencia producida en las filas más retrasadas.

Liu *et al.* [1983] propusieron otro modelo tridimensional que incluye los efectos de la estabilidad atmosférica. Sin embargo, estos autores despreciaron la difusión debida a la turbulencia originada en la aeroturbina y en la capa de cortadura, considerando una viscosidad turbulenta y unos coeficientes de difusión iguales a los del flujo no perturbado.

Ainslie [1985] [1986] y [1988] desarrolló un modelo de viscosidad turbulenta parabólico que asume un flujo de estela axilsimétrico. Las variaciones de presión se desacoplan en el análisis y sólo deben ser resueltas las ecuaciones de conservación de masa y momento. Consecuentemente, el modelo no es capaz de manejar los efectos del suelo o las variaciones del flujo ambiente con la altura. Los esfuerzos turbulentos son modelizados utilizando un esquema de cierre de viscosidad turbulenta en que ésta se obtiene de una fórmula analítica sencilla basada en la teoría del camino libre de mezcla de Prandtl [1952], y que además incluye una contribución debida a la turbulencia ambiente. Esta viscosidad turbulenta es una media a lo largo de una sección normal del flujo, por lo que el modelo no puede estimar las variaciones transversales de las propiedades turbulentas en la estela. Para pequeñas distancias aguas abajo, se modifica la viscosidad turbulenta mediante una función filtro empírica para interpretar mejor el equilibrio entre el campo medio de velocidad y el campo de turbulencia en desarrollo. Con ello, aparecen gran cantidad de constantes en el modelo, que deben ser ajustadas por comparación con experimentos. Sin embargo, su validez en casos más generales no está clara. El modelo no es excesivamente complicado, y proporciona resultados razonables, en comparación con experimentos en túnel de viento. Albers *et al.* [1993] advirtieron que existía un mejor acuerdo entre el modelo de Ainslie y los experimentos si el perfil logarítmico incidente se superponía en la estela axilsimétrica calculada. Luken y Vermeulen [1986] y Luken *et al.* [1986] compararon nuevos datos experimentales para validar el modelo cinemático de Vermeulen y el modelo de Ainslie. Aunque encontraron un grado de acuerdo aceptable, algunos aspectos no fueron predichos correctamente. Para reproducir correctamente estos aspectos, se requiere que los modelos retengan los efectos tridimensionales.

Crespo *et al.* [1985] desarrollaron el modelo UPMWAKE, en el que la turbina se supone inmersa en el seno de un flujo básico no uniforme correspondiente a la capa límite atmosférica. El modelo es completado y

extendido en Crespo y Hernández [1989]. Las propiedades no uniformes del flujo incidente sobre la aeroturbina son modelizadas teniendo en cuenta la estabilidad atmosférica, que viene dada por medio de dos parámetros: la longitud de Monin-Obukhov y la rugosidad de la superficie. La descripción del flujo básico dada por el modelo está basada en expresiones obtenidas a través de consideraciones analíticas y resultados experimentales dados en Panofsky y Dutton [1984]. Este flujo básico es perturbado por la presencia de la turbina. Las ecuaciones que determinan el flujo son las de conservación de la masa, el momento, la energía, la energía cinética turbulenta y la tasa de disipación de la energía cinética turbulenta. La modelización de los términos de transporte turbulento se basa en un método de cierre k–ε. Este conjunto de ecuaciones es resuelto utilizando diferencias finitas mediante el algoritmo SIMPLE propuesto por Pantakar y Spalding [1972]. La integración numérica se realiza mediante aproximación parabólica y un método ADI. El modelo es tridimensional, y retiene las variaciones de presión en la sección normal con el objeto de calcular las velocidades transversales. La versión simplificada de UPMWAKE presentada en Crespo *et al.* [1985] asume que toda la convección es debida al flujo ambiente no perturbado. Esta idea es atractiva porque se retiene el carácter tridimensional del problema y reduce el sistema de ecuaciones en derivadas parciales de siete a tres. Sin embargo, esta aproximación sólo está justificada suficientemente lejos de la turbina, donde la perturbación en la estela es pequeña. Efectivamente, en algunos casos los resultados obtenidos están de acuerdo con los del modelo completo y con los experimentos, pero en otros, particularmente en la región de la estela cercana, no eran correctos. La mayoría de los resultados de UPMWAKE publicados corresponden al modelo completo de siete ecuaciones. Crespo y Hernández [1986] y [1989] y Crespo *et al.* [1988] y [1990] compararon los resultados de UPMWAKE con los datos experimentales en túnel de viento obtenidos por Luken *et al.* [1986] y con mediciones en campo (Taylor *et al.* [1985]) con máquinas reales. El código predice correctamente varios aspectos interesantes. Algunas discrepancias aparecen en la zona inicial de la estela, donde los valores predichos son menores que los medidos en los experimentos de Taylor *et al.* [1985].

Posteriormente, en base a los resultados del código, Crespo y Hernández [1993] y [1996] han desarrollado correlaciones para estimar la intensidad de turbulencia tanto en la estela cercana como en la estela lejana. Las predicciones de las correlaciones se compararon con un gran número de experimentos compilados por Quarton [1989] procedentes tanto de túnel de viento como de medicines en campo, obteniendo un acuerdo aceptable.

Frandsen *et al.* [1996] formularon también correlaciones similares para el decaimiento de la intensidad de turbulencia con la distancia.

En Crespo y Hernández [1993] y [1996] también se propone un método simple para obtener los espectros de la turbulencia en la estela a partir de los valores de k y ε calculados mediante UPMWAKE, y la comparación con resultados de Højstrup [1990] ofrece un buen acuerdo en algunos casos. Frandsen *et al.* [1996] y Crespo *et al.* [1996] realizaron también otras comparaciones de los resultados en el cálculo de espectros obtenidos mediante este procedimiento con medidas tomadas en el parque eólico de Vindeby. Algunos de los resultados alcanzados para la longitud de escala de la turbulencia, que son necesarios para estimar los espectros son menores que los medidos. Como posibles razones para esta discrepancia son, por un lado que UPMWAKE no tiene en cuenta las fluctuaciones turbulentas de pequeña escala (alta frecuencia) generadas en la capa límite de las palas del rótor, y por otro lado, que la aeroturbina es capaz de adaptarse a las fluctuaciones de baja frecuencia extrayendo energía del viento en el rango de grandes escalas (baja frecuencia). Sin embargo Papadopoulos *et al.* [1995] midieron que la tendencia puede ser en sentido contrario cuando la velocidad del viento es mayor que la que corresponde al valor máximo del coeficiente de potencia, es decir cuando la turbina actúa en régimen regulado. Larsen *et al.* [1996] propusieron otro procedimiento a través del cual se suman las contribuciones individuales para cada una de las diferentes escalas.

Smith y Taylor [1991] y más en detalle Taylor [1993] presentaron un modelo de dos ecuaciones no simétrico, que en muchos aspectos es similar al modelo de tres ecuaciones de Crespo *et al.* [1985]. Este modelo desprecia las velocidades transversales y sólo se resuelve la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección axial. Para modelar la viscosidad turbulenta se utiliza un cierre de tipo k–L, donde la longitud de escala de la turbulencia L se obtiene por su relación con la anchura de la estela ajustando el perfil calculado a uno gaussiano. El valor de la tasa de disipación de energía cinética turbulenta ε es calculado a través de una combinación algebraica de k y L, de modo que no se necesita una ecuación de conservación en derivadas parciales para ε. Nuevamente se observó el mismo tipo de problema previamente mencionado para el modelo UPMWAKE de tres ecuaciones. Los resultados obtenidos en comparación con sus resultados experimentales en túnel de viento son muy buenos, pero comparaciones a escala real en Nibe mostraron que el modelo sobreestima los valores del defecto de velocidad.

En base al modelo de Ainslie [1988] la compañía Garrad & Hassan desarrolló en código EVFARM, descrito en Tindal [1993] y Adams y Quarton [1996]. El código incorpora dos modelos semiempíricos alternativos para el cálculo de la turbulencia en la estela. El primero de ellos, descrito por Hassan [1993] proporciona una distribución uniforme de turbulencia en la estela, mientras que el otro, debido a Luken *et al.* [1986], tiene en cuenta variaciones radiales de la intensidad de turbulencia. Adams y Quarton [1996] realizaron una validación exhaustiva de ambos códigos, UPMWAKE y EVFARM, en comparación con las medidas en túnel de viento de Hassan [1993]. Las predicciones para el defecto de velocidad fueron buenas, mientras que las discrepancias en la intensidad de turbulencia fueron algo mayores, aunque aceptables. Además, pusieron de manifiesto que existía un acuerdo mejor si se tomaba un cierto desplazamiento del origen de coordenadas aguas abajo, para tener en cuenta el desarrollo de la región de expansión. La razón física de este desplazamiento no está clara, ya que, aunque la región de expansión está detrás del rótor, la capa de cortadura comienza inmediatamente a continuación del rótor. A su vez, se observaron importantes divergencias en la región inicial de la estela entre los resultados de UPMWAKE y las mediciones de Nibe, publicadas por Taylor *et al.* [1985].

Por medio de la eliminación de la aproximación de capa límite utilizada en UPMWAKE, Crespo *et al.* [1990] y Crespo y Hernández [1991] propusieron un método elíptico para operar simultáneamente con los gradientes de presión axiales y los efectos difusivos, reteniendo los términos de difusión tanto en la dirección axial como en la transversal. Así pues, el modelo describe tanto la evolución de la región de expansión como los procesos de difusión. Sin embargo, no se encontraron diferencias fundamentales entre los resultados de los modelos parabólico y elíptico, y el desplazamiento del origen era aparentemente innecesario. Otros modelos elípticos han sido propuestos por Cleijne *et al.* [1993] y Ansorge *et al.* [1994]. En todos los casos las mejoras en la concordancia con los experimentos entre los modelos parabólicos y elípticos son muy ligeras, y no está justificado el esfuerzo computacional adicional que requiere el caso elíptico.

Otra posible razón para la discrepancia que se observa entre modelos y experimentos en la estela cercana esta asociada a la incertidumbre en el perfil de defecto de velocidad inicial. En todos los casos mencionados previamente se asume un perfil uniforme, o bien gaussiano (Taylor [1993]), obtenido a partir del coeficiente de empuje. Un enfoque alternativo para esta cuestión es el

modelo de estela multiparamétrico de Voutsinas *et al.* [1992(a)] y [1992(b)], que fue mejorado por Cleijne *et al.* [1993] y Voutsinas *et al.* [1993]. Este modelo divide la estela en la región del rótor, la región de estela cercana y la región de estela lejana, aplicando un modelo de vórtices para la región del rótor, gobernado por las ecuaciones de transporte de vorticidad y la ley de Biot–Savart. Para la región de estela cercana se utiliza un modelo de campo, y para la región de estela lejana se introducen expresiones explícitas y autosemejantes similares a las de los modelos cinemáticos. Además, se requieren ciertas suposiciones adicionales para realizar el ensamblaje entre las distintas regiones. El método fue parcialmente exitoso en la simulación de los resultados experimentales de Nibe, Taylor [1990]. Más tarde, Magnusson *et al.* [1996(a)] y [1996(b)] aplicaron el modelo para reproducir los resultados experimentales obtenidos en el parque eólico de Alsvik. El acuerdo entre las predicciones del modelo y los experimentos es razonable para el defecto de velocidad, sin embargo, la comparación de características de la turbulencia como la energía cinética turbulenta y los esfuerzos de Reynolds es más pobre.

Otras aportaciones de interés más recientes pueden encontrarse en Larsen *et al.* [2003], dónde se presentan resultados de unos cálculos CFD en $3D$ que indican que la estela cercana puede ser separada en dos regiones, de acuerdo a si las estructuras del flujo en torno a los álabes de la turbina se han desarrollado hasta alcanazar una etapa en la que no hay variación azimutal o no. La extensión de la región interna (en la que las estructuras asociadas a los álabes pueden ser identificadas) es sólo del orden de un diametro del rótor.

1.3.4 ANISOTROPÍA

Todos los modelos anteriores se basan en las ecuaciones de turbulencia obtenidas mediante el procedimiento del promedio de Reynolds, conocidas por sus siglas en la literatura inglesa, RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes equations), y utilizan un esquema de cierre basado en ninguna, una, ó dos ecuaciones de transporte adicionales. En todos los casos se utiliza una viscosidad turbulenta, que implícitamente asume un campo de turbulencia isótropo. En contraposición, Ansorge *et al.* [1994] emplearon un modelo de cierre con una ecuación de transporte para cada componente del tensor de Reynolds mediante la aplicación de un código CFD comercial. Los resultados fueron aceptables, pero el coste computacional es demasiado grande desde el punto de vista de una aplicación de ingeniería. Tampoco está claro que

mejoraran significativamente los conseguidos hasta el momento. Sin embargo, el conocimiento con cierto grado de detalle de las distintas componentes del tensor de Reynolds tiene importancia debido a las propiedades de anisotropía de la turbulencia en las estelas de aeroturbinas. En muchas aplicaciones, y en particular para calcular las cargas fluctuantes sobre la turbina es primordial conocer las oscilaciones turbulentas de las tres componentes de la velocidad, y muy especialmente en la dirección principal del flujo y no basta con dar un valor de la energía cinética turbulenta (semisuma de las tres componentes). El fenómeno de la anisotropía ha sido medido por Cleijne [1992] en el parque eólico de Sexbierum, donde las seis componentes del tensor simétrico de esfuerzos turbulentos fueron medidas. De estos experimentos se desprende que el esfuerzo de cortadura turbulento se comporta de modo análogo a como lo hace el defecto de velocidad, lo que indica la validez de la hipótesis de viscosidad turbulenta, al menos cualitativamente. Experimentos en túnel de viento llevados a cabo por Smith [1990] arrojaron conclusiones similares. En general, la turbulencia en el núcleo de la estela parece ser más isótropa que en el flujo básico, aunque fuera de éste existen picos de intensidad de turbulencia en la dirección principal del flujo que son notablemente más intensos que los asociados a las otras componentes. Estos picos se producen en los puntos en que los gradientes de velocidad son mayores: la capa de cortadura anular.

Gómez-Elvira y Crespo [2003] y Gómez-Elvira *et al.* [2005] han desarrollado el código UPMANIWAKE, basado en un modelo de ecuaciones algebraicas (no de transporte) y explícito (no un sistema de ecuaciones) para las componentes del tensor de esfuerzos turbulentos de Reynolds. En lugar de utilizar una ecuación de transporte adicional para cada componente del tensor como hicieron Ansorge *et al.* [1994], se utiliza un cierre de dos ecuaciones del tipo k–ε y a continuación se dan expresiones analíticas no excesivamente complejas para estimar cada una de las componentes del tensor de esfuerzos turbulentos. Los parámetros del modelo son ajustados de manera que en ausencia de perturbación, es decir, para un coeficiente de empuje nulo, se recuperen las características de anisotropía turbulenta propias de la atmósfera neutra, recogidas en Panofsky y Dutton [1984]. La comparación de los resultados del modelo con los datos experimentales de Cleijne [1992] muestra un acuerdo bastante bueno. El mayor logro del código UPMANIWAKE es la predicción del aumento de la isotropía en la turbulencia en el interior de la estela.

1.3.5 ESTABILIDAD ATMOSFÉRICA

Un importante aspecto que no ha sido suficientemente tratado es la influencia de la estabilidad atmosférica. Crespo *et al.* [1985] demostraron que, como podía esperarse, una atmósfera estable inhibe la difusión turbulenta, mientras que ésta es realzada en una atmósfera inestable. Tendría un alto interés realizar una comparación entre las predicciones de modelos numéricos que puedan simular las características de estabilidad atmosférica con resultados experimentales a este respecto dados por Magnusson [1994], Magnusson y Smedman [1994] y Luken *et al.* [1986].

1.3.6 COHERENCIA ESPACIAL

La coherencia espacial de la turbulencia, definida como el valor absoluto y normalizado del espectro cruzado para dos puntos diferentes del espacio, es otra magnitud interesante. Representa el grado de correlación en las historias temporales de las variables fluidas en dos puntos separados en el espacio. Højstrup [1999] presenta resultados de mediciones de la coherencia espacial recogidos en el parque eólico de Nørrekaer Enge II, tanto vertical como lateral. Lo que encontró es que la influencia de la estela es pequeña para la coherencia vertical, y que la coherencia lateral estaba modificada sólo en la estela cercana.

1.3.7 SERPENTEO DE LA ESTELA

Las estelas individuales calculadas tanto por los modelos cinemáticos y los de campo no tienen en cuenta directamente los torbellinos de mayor tamaño que la estela y que pueden moverla físicamente. Este fenómeno es conocido en los estudios de dispersión atmosférica como serpenteo o "meandering". En general, se ha observado que los modelos de campo presentan un mejor acuerdo con los datos obtenidos en túnel de viento que con los experimentos en parques eólicos, siendo el efecto de "meandering" una de las razones que han sido señaladas para explicar esto. Whale *et al.* [1996] encontraron diferencias significativas entre los resultados experimentales en túnel y los de las pruebas en gran escala. Sin embargo, apuntaron otras causas diferentes del serpenteo como parcialmente responsables de las discrepancias, tales como la influencia del terreno y los efectos de escala. Baker y Walter

[1985], Ainslie [1986] y Taylor [1993] tuvieron en cuenta el efecto de "meandering" en sus cálculos asumiendo que los torbellinos mayores crecen en tamaño linealmente con la distancia a la turbina y en proporción a la desviación típica de la dirección del viento σ_0. Sin embargo, Högström *et al.* [1988] argumentan que este enfoque no es correcto, ya que σ_0 es causada por los torbellinos de todas las escalas, incluyendo aquellos menores que el tamaño de la estela.

1.4 OBJETIVO DE LA TESIS

Todos los modelos de campo desarrollados hasta la fecha se basan en las ecuaciones turbulentas RANS. El promedio de Reynolds se realiza sobre todas las escalas de la turbulencia.

Sin embargo, una descripción completamente detallada del campo fluido implicaría la resolución de las ecuaciones no estacionarias de Navier-Stokes, lo que se conoce como simulación numérica directa (DNS). Ahora bien, en las aplicaciones medioambientales o industriales, en las que el número de Reynolds es muy elevado, la simulación numérica directa de la turbulencia es generalmente imposible porque el amplísimo rango que existe entre las escalas más grandes y las más pequeñas y disipativas de la turbulencia no puede ser simulado explícitamente ni siquiera en los computadores más potentes. El enfoque de la simulación de grandes escalas, conocido en la literatura por sus siglas en inglés, LES (Large-Eddy Simulation) es conceptualmente más apropiado para estudiar la evolución de la turbulencia en una estela de aeroturbina ya que las escalas más grandes de la turbulencia, las que controlan la difusión turbulenta del momento y la energía, son calculadas explícitamente, mientras que sólo ha de ser modelado el efecto del movimiento disipativo de pequeña escala, el cual tiende a ser más isótropo. LES reproduce las oscilaciones no estacionarias del flujo a lo largo de todas las escalas más grandes que el tamaño de la malla; consecuentemente, es razonable obtener un mayor detalle de las características de la turbulencia que en los modelos RANS.

El objetivo de la presente tesis es implementar un modelo LES simplificado en un código CFD para simular y caracterizar la turbulencia generada por la presencia de una aeroturbina, prestando especial atención a las particularidades del problema que no pueden ser tratadas por los métodos

RANS, o pueden serlo en menor detalle, tales como el conocimiento de las componentes del tensor de esfuerzos de Reynolds en cada punto y en cada instante, la anisotropía de la turbulencia, las propiedades espectrales de la misma y la coherencia espacial de las fluctuaciones turbulentas. Otras aplicaciones de interés de la técnica LES que aprovecha la no estacionariedad del modelo, tal como el estudio del serpenteo de la estela por efecto de la variabilidad de la dirección media del viento con el tiempo (en inglés, "meandering effect"), se proponen como trabajo futuro.

CAPÍTULO 2

SIMULACIÓN DE GRANDES ESCALAS

2.1 IDEA Y OBJETIVO

La *simulación de grandes escalas* (LES, de su terminología en inglés Large−Eddy Simulation), también llamada *simulación de grandes remolinos* o *simulación con modelos de submalla*, se está estableciendo crecientemente como enfoque de gran utilidad para el cálculo computacional de flujos turbulentos. Se utiliza ampliamente para desentrañar la física profunda de la turbulencia y para calcular flujos de relevancia industrial en los casos en los que los modelos basados en el promedio de Reynolds (RANS, de Reynolds Averaged Navier Stoques equations) no son suficentemente precisos y las técnicas de simulación numérica directa (DNS, de Direct Numeric Simulation) son prohibitivamente caras o inviables en cuanto a los recursos informáticos necesarios.

La idea de la simulación de grandes escalas surge como alternativa a la simulación numérica directa para el tratamiento numérico de los fenómenos turbulentos. Para flujos con números de Reynolds muy elevados la escala de de Kolmogorov (escala a la que los efectos de difusión molecular empiezan a ser dominantes frente a los fenómenos de transporte turbulento) llega a ser tan sumamente pequeña que la malla necesaria para resolver numéricamente el problema debería ser tan fina que resulta imposible que el problema pueda ser abordado computacionalmente. El fundamento de la simulación de grandes escalas reside en establecer dos escalas de simulación para las magnitudes

fluidas involucradas, cada una de las cuales recibe un tratamiento diferente. La frontera o separación entre las dos escalas viene determinada por la distancia entre los nodos de la red. LES simula explícitamente las escalas más grandes de la turbulencia, aquellas mayores que el tamaño de la malla, mientras que los efectos de las escalas menores sobre el flujo son aproximados o modelizados. La justificación para este tipo de tratamiento es que los torbellinos de mayor tamaño contienen la mayor parte de la energía turbulenta y realizan la mayor parte del transporte de las magnitudes conservadas (masa y cantidad de movimiento), y además, sus características son muy variables de un tipo de flujo a otro, mientras que los torbellinos pequeños deben presentar características más universales y por tanto deben de ser más fáciles de modelizar. Dicho de otro modo, los errores cometidos por el modelo serán menos importantes que los que se producen mediante la aplicación de cierres turbulentos de tipo RANS, ya que sólo son modelizadas las escalas más pequeñas.

Los resultados alcanzados con LES con una malla gruesa son, teóricamente, equivalentes a los que resultarían de aplicar un "filtro numérico" sobre los obtenidos con DNS mediante una malla muy refinada. Dicho filtro numérico eliminaría todas las escalas de la turbulencia menores que el tamaño de la malla gruesa.

2.2 FILTRADO

La relación teórica entre los campos de magnitudes fluidas de *grandes escalas* y los campos originales se expresa mediante un filtrado a través de la convolución con una función filtro $G_\Delta(\mathbf{r})$ de ancho vectorial Δ. Así, el campo $\varphi(\mathbf{r},t)$ tiene su valor filtrado $\overline{\varphi}(\mathbf{r},t)$ dado por:

$$\overline{\varphi}(\mathbf{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{r}',t) G_\Delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, d^3\mathbf{r}' \tag{2.1}$$

La función filtro puede ser gaussiana, filtro de caja, filtro *cut-off*, o presentar cualquier forma matemática de entre las planteadas en el Apéndice A, o cualquier otra similar. El filtrado es esencialmente una especie de promedio espacial de la magnitud que se considera extendido a una región de tamaño del orden de Δ en torno a la posición local. Cuanto menor es el valor de Δ más restringida es la zona en que se realiza la media espacial, y por tanto más se asemejarán los valores de la función filtrada a los de la función original en

cada punto. La condición de normalización que debe cumplir el filtro es, por tanto:

$$\int_{\mathbb{R}^3} G_\Delta(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = 1 \tag{2.2}$$

Es fácilmente verificable que la operación de filtrado (2.1) es un operador lineal, y que además conmuta con las derivadas espaciales y temporal, cumpliéndose:

$$\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}} = \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_i} \qquad i = 1,2,3 \tag{2.3}$$

$$\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} = \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t} \tag{2.4}$$

Denotemos por φ' la diferencia entre el campo real y su valor filtrado, es decir:

$$\varphi = \overline{\varphi} + \varphi' \tag{2.5}$$

Los campos φ' conciernen a las fluctuaciones turbulentas de escalas menores que el tamaño de Δ y se denominan campos de subescala.

Por último, una propiedad interesante del operador de filtrado debida a su definición como convolución, radica en que éste equivale a multiplicar al campo original por la transformada de la función filtro en el espacio de Fourier(*). En otras palabras, si el operador $\hat{\cdot}$ denota la transformación integral de Fourier expresada mediante:

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}) e^{-\imath \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \tag{2.6}$$

se tiene que:

$$\hat{\overline{\varphi}}(\mathbf{k}, t) = \hat{\varphi}(\mathbf{k}, t) \hat{G}_\Delta(\mathbf{k}) \tag{2.7}$$

(*) La prueba de esta propiedad, denominada *teorema de convolución*, puede encontrarse en el Apéndice A.

2.3 LAS ECUACIONES DE CONTINUDAD Y NAVIER-STOKES FILTRADAS

Las leyes de la mecánica de fluidos para el caso incompresible con fuerzas másicas que derivan de un potencial vienen dadas por la ecuación de conservación de masa o continuidad y las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento o de Navier-Stokes, que escritas en forma indiciada son, respectivamente:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i v_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(2\nu S_{ij}) \tag{2.9}$$

Aquí, $S_{ij} = \frac{1}{2}(\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i)$ representa el tensor de deformación y P es la presión reducida $p + \rho U$. Los restantes símbolos empleados p, U, ρ, ν, y v_i corresponden respectivamente a la presión estática, el potencial de fuerzas másicas, la densidad, la viscosidad cinemática y las componentes del vector velocidad $\mathbf{v}$.

Realizando el filtrado de estas ecuaciones, y teniendo en cuenta las propiedades de conmutación del mismo con las derivadas espaciales y temporal, obtenemos:

$$\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{v_i v_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(2\nu \overline{S}_{ij}) \tag{2.11}$$

Introduciendo el tensor de esfuerzos de subescala (SGS, de SubGrid Scale):

$$\tau_{ij}^{(SGS)} = \rho\left(\overline{v}_i\overline{v}_j - \overline{v_i v_j}\right) \tag{2.12}$$

llegamos inmediatamente a

$$\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{v}_i\overline{v}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\nu \overline{S}_{ij} + \frac{1}{\rho}\tau_{ij}^{(SGS)}\right) \tag{2.13}$$

La ecuación del movimiento para los campos filtrados (2.13) es análoga a la ecuación de Reynolds para flujo turbulento promediado en el tiempo. Sin

embargo, debido a las propiedades del operador filtrado, tal y como se ha definido, surgen varios términos en el tensor de esfuerzos de subescala:

$$\begin{aligned}\tau_{ij}^{(SGS)} &= \rho\left(\overline{v_i}\overline{v_j} - \overline{v_i v_j}\right) = \rho\left(\overline{v_i}\overline{v_j} - \overline{\overline{v_i}\overline{v_j}} - \overline{v'_i\,\overline{v_j}} - \overline{\overline{v_i}v'_j} - \overline{v'_i\,v'_j}\right) \neq \\ &\neq -\rho\overline{v'_i\,v'_j}\end{aligned} \tag{2.14}$$

Los dos primeros términos del tercer miembro constituyen el denominado tensor de esfuerzos de Leonard:

$$L_{ij} = \rho\left(\overline{v_i}\overline{v_j} - \overline{\overline{v_i}\overline{v_j}}\right) \tag{2.15}$$

Además del operador de filtrado $\bar{\cdot}$, es necesario introducir el operador esperanza estadística de una variable aleatoria $\langle\cdot\rangle$. Éste último no es sino un promedio espacial (en aquellas direcciones para las que el flujo es homogéneo) y temporal de la variable. De esta forma se tiene:

$$\overline{\varphi} = \langle\overline{\varphi}\rangle + \overline{\varphi}' \tag{2.16}$$

Nótese la diferencia tipográfica entre φ' y φ'. La primera notación representa las fluctuaciones del valor real de la magnitud fluida frente a su valor filtrado, mientras que en el segundo caso se denota las oscilaciones respecto a su valor medio estadístico. Si realizamos el mismo proceso llevado a cabo anteriormente con las ecuaciones de Navier-Stokes intercambiando el operador $\bar{\cdot}$ por el $\langle\cdot\rangle$, y teniendo en cuenta la propiedad de idempotencia de este último, al final obtendremos un nuevo tensor asociado a los esfuerzos turbulentos estadísticos de Reynolds, cuya forma es:

$$\tau_{ij}^{(Re)} = -\rho\left\langle\overline{v}_i'\overline{v}_j'\right\rangle \tag{2.17}$$

Se quiere llamar la atención respecto a que, a pesar de la similaridad y paralelismo entre las expresiones (2.5) y (2.16) y entre (2.14) y (2.17), conceptualmente representan ideas y cálculos muy distintos. El modelo de grandes escalas simula campos de rápidas variaciones en el tiempo y en el espacio (del orden de Δ, por lo que si éste es suficientemente reducido, las fluctuaciones espaciales llegarán hasta longitudes de onda muy pequeñas), sin embargo, las ecuaciones del promedio de Reynolds manejan campos que varían muy suavemente en el espacio y generalmente no sufren cambios en el tiempo, y si los hay, las variaciones se producen muy lentamente.

Al final del proceso, los esfuerzos turbulentos globales serán la suma de los esfuerzos de Reynolds (2.17) y los esfuerzos de subescala (2.14). Los

esfuerzos totales serán la suma de los esfuerzos turbulentos globales más los esfuerzos puramente viscosos:

$$\tau_{ij}^{(visc)} = 2\rho\nu\overline{S}_{ij} \tag{2.18}$$

2.4 VISCOSIDAD TURBULENTA

De los varios métodos de aproximación que existen para el tensor de esfuerzos de subescala, los más extendidos son los conocidos como modelos de viscosidad turbulenta. Estos modelos fenomenológicos se basan en el establecimiento de una analogía entre la interacción de los torbellinos más pequeños y la colisión perfectamente elástica que se produce a escala molecular y que domina los fenómenos de transporte a nivel microscópico. Esta suposición se adopta también en los modelos basados en las ecuaciones del promedio de Reynolds. En simulación de grandes escalas, dicha hipótesis se traduce en una disociación del tensor de esfuerzos de subescala en dos partes tal que una de ellas tenga traza nula:

$$\tau_{ij}^{(SGS)} = -P^0\delta_{ij} + \tau_{ij}^0 \tag{2.19}$$

Se introduce $P^0 = -\tau_{kk}{}^{(SGS)}/3$ de tal manera que, por definición, se tenga $\tau_{kk}{}^0$=0. La parte de traza nula se modeliza introduciendo el parámetro ν_T conocido como viscosidad turbulenta:

$$\tau_{ij}^0 = 2\rho\nu_T\overline{S}_{ij} \tag{2.20}$$

Efectivamente la traza de este tensor es nula, debido a la ecuación de continuidad filtrada (2.10) (esta es la razón por al que se establece la disociación del tensor de esfuerzos de subescala). Finalmente, introduciendo una "pseudopresión" o presión modificada que aglutina la presión reducida filtrada y la parte de traza no nula del tensor de esfuerzos de subescala $P^* = \overline{P} + P^0$ las ecuaciones de Navier-Stokes filtradas (2.13) adoptan la forma:

$$\frac{\partial\overline{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial\overline{v}_i\overline{v}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[2(\nu+\nu_T)\overline{S}_{ij}\right] \tag{2.21}$$

o, de forma equivalente:

$$\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{v}_i \overline{v}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\nu_{tot}\overline{S}_{ij}\right) \tag{2.22}$$

introduciendo la viscosidad total $\nu_{tot} = \nu + \nu_T$.

El problema del cierre o clausura de las ecuaciones se reduce ahora a parametrizar los fenómenos de transporte efectos de subescala en función de los propios campos de subescalas, o dicho de otro modo, encontrar una expresión del tipo $\nu_T = \nu_T(\Delta, \mathbf{v}')$.

2.5 MODELOS DE SUBESCALA

2.5.1 EL MODELO DE SMAGORINSKY

El modelo más sencillo y también el más ampliamente usado es el propuesto por Smagorinsky en [1963], y puede ser justificado mediante una discusión de análisis dimensional. La dependencia funcional del tipo planteado al final del párrafo anterior más sencilla posible y dimensionalmente correcta es:

$$\nu_T \sim v'\Delta \tag{2.23}$$

donde v' y Δ son una velocidad y una longitud característica de las subescalas. Por otro lado, sabemos que debe existir una cascada de energía cinética turbulenta en la cual la tasa de destrucción de esta energía debe ser la misma para todas las escalas de la turbulencia, luego:

$$\varepsilon \sim \frac{v'^3}{\Delta} \sim \frac{V^3}{L} \tag{2.24}$$

donde V y L son una velocidad y una longitud característica de las grandes escalas, o escalas resueltas. Atendiendo a esto, se debe cumplir que:

$$\nu_T \sim V\Delta^{4/3}L^{-1/3} \tag{2.25}$$

Por otro lado, introduciendo la norma del tensor de deformación filtrado definida mediante:

$$\|\overline{\mathbf{S}}\| = \sqrt{2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}} \tag{2.26}$$

podemos estimar $V \sim L\|\overline{\mathbf{S}}\|$, llegando a:

$$\nu_T \sim \Delta^{4/3} L^{2/3} \|\overline{\mathbf{S}}\| \tag{2.27}$$

Y finalmente, asumiendo que no debe cometerse un error demasiado grande al aproximar $\Delta^{4/3} L^{2/3} \approx \Delta^2$, obtenemos la habitual forma del modelo de Smagorinsky, dada por la expresión:

$$\nu_T = C_S^2 \Delta^2 \|\overline{\mathbf{S}}\| \tag{2.28}$$

siendo C_S la constante de Smagorinsky, un parámetro que puede ajustarse experimentalmente, o bien puede estimarse teóricamente. Lilly [1965] supuso la turbulencia isótropa y que el número de onda donde se hace el corte en el proceso de filtrado está dentro de la cascada de Kolmogorov, es decir en la zona en que la densidad espectral de energía decae con la potencia $-5/3$ del número de onda. De esta forma ajustó la constante C_S para que, en promedio espacial, el decaimiento de la turbulencia de la subescala cumpla con esta ley de decaimiento, obteniendo:

$$C_S = \frac{1}{\pi}\left(\frac{3}{2} C_K\right)^{-3/4} \tag{2.29}$$

donde C_K es la constante de Kolmogorov. Si se toma para ésta $C_K = 1{,}4$ el valor obtenido para la constante de Smagorinsky es $C_S \approx 0{,}18$. Sin embargo, en la práctica totalidad de los experimentos realizados, este valor resulta demasiado elevado, a pesar de que la mayoría de las estimaciones teóricas proporcionan un valor de $C_S \approx 0{,}2$. Por el contrario, el valor de la constante que mejor concuerda con la mayoría resultados experimentales se encuentra en torno a 0,1.

En cuanto a la longitud de filtrado, aparece un problema cuando la estructura de la turbulencia es muy anisótropa. Esto sucede en algunas regiones, como por ejemplo en las proximidades de una pared rígida. Normalmente es necesario refinar mucho la malla de cálculo en la dirección perpendicular a la pared en las proximidades de ésta, no siendo ello necesario en las otras direcciones. Esto plantea la cuestión sobre cuál es la longitud Δ correcta en la expresión para ν_T. La elección habitual es:

$$\Delta = \left(\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z\right)^{1/3} \tag{2.30}$$

donde Δx, Δy y Δz son los espaciados de malla en las tres direcciones espaciales, aunque existen otras diferentes opciones también posibles, tales como $\Delta = (\Delta x + \Delta y + \Delta z)/3$, $\Delta = \left(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\right)^{1/2}$, y otras.

El modelo de Smagorinsky proporciona resultados satisfactorios para turbulencia isótropa, flujos libres con cortadura y flujos en canales si se le adapta una función de amortiguamiento en la zona cercana de la pared, del mismo modo en que actúa la función de Van Driest [1956] en el modelo de la longitud de mezcla de Prandtl [1952]. Normalmente se toma la corrección:

$$C_S = C_{S0}\left(1 - e^{-\frac{y^+}{A^+}}\right) \tag{2.31}$$

donde y^+ es la distancia a la pared en unidades viscosas de pared ($y^+ = yu_*/\nu$, siendo $u_* = (\tau_0/\rho)^{1/2}$ la velocidad de fricción, y τ_0 el esfuerzo de cortadora en la pared) y A^+ es una constante para la que normalmente se da el valor 25.

Aún así, el modelo no funciona bien en la transición hacia la turbulencia en el flujo de una capa límite sobre una pared plana. El flujo es excesivamente disipativo en las cercanías de la pared; la viscosidad generada por los esfuerzos cortantes es más alta de lo debido, lo que hace que éste permanezca laminar, retrasándose dicha transición.

2.5.2 EL MODELO DINÁMICO

Más recientemente Germano *et al.* [1990] propusieron un modelo dinámico basado en el modelo de Smagorinsky. La idea que persigue esta nueva aproximación es muy interesante. Supongamos que realizamos una simulación LES con una malla relativamente fina. Ahora podríamos estimar el valor de la constante del modelo de Smagorinsky para una nueva simulación LES con una malla más gruesa, a partir de los datos acerca de las escalas de turbulencia más pequeñas resueltas en la primera simulación. El procedimiento de cálculo pone en práctica estos conceptos. Para ello, contamos con las siguientes operaciones de filtrado:

- filtro fino, de longitud de filtrado Δ. Atendiendo a (2.12), los esfuerzos de subescala vienen dados por:

$$\tau_{ij}^{(SGS)} = \rho\left(\overline{v_i}\,\overline{v_j} - \overline{v_i v_j}\right) \tag{2.32}$$

- filtro grueso, con longitud de filtrado $a\,\Delta$, con $a > 1$ (habitualmente $a = 2$). Los esfuerzos de subescala para este filtro son:

$$T_{ij}^{(SGS)} = \rho\left(\tilde{v}_i\tilde{v}_j \;\; - \widetilde{v_i v_j}\right) \tag{2.33}$$

- doble filtro fino-grueso. Al estar asociados simultáneamente los filtros fino y grueso, la longitud de filtrado en este caso será igual que en el caso anterior $a\,\Delta$. Ahora el tensor de esfuerzos de subescala es:

$$T^{*(SGS)}_{ij} = \rho\left(\tilde{\bar{v}}_i\tilde{\bar{v}}_j - \widetilde{\overline{v_i v_j}}\right) \tag{2.34}$$

Ahora restamos la ecuación (2.32) filtrada con el filtro grueso de la ecuación (2.34), y obtenemos el nuevo tensor de Leornard:

$$L_{ij} = \rho\left(\tilde{\bar{v}}_i\tilde{\bar{v}}_j - \widetilde{\overline{v_i v_j}}\right) = T^{*(SGS)}_{ij} - \tilde{\tau}_{ij}^{(SGS)} \tag{2.35}$$

Si aplicamos el modelo de Smagorinsky al tercer miembro de la expresión (2.35), resulta lo siguiente:

$$L_{ij} = \tfrac{1}{3}T^{*(SGS)}_{kk}\delta_{ij} + 2\rho C_s^2\left(a\Delta\right)^2\left\|\tilde{\bar{\mathbf{S}}}\right\|\tilde{\bar{S}}_{ij} - \tfrac{1}{3}\tilde{\tau}_{kk}^{(SGS)}\delta_{ij} - 2\rho C_s^2\Delta^2\widetilde{\left\|\bar{\mathbf{S}}\right\|\bar{S}_{ij}} \tag{2.36}$$

Introduciendo el tensor de traza nula $\mathbf{M}$ definido mediante:

$$M_{ij} = a^2\left\|\tilde{\bar{\mathbf{S}}}\right\|\tilde{\bar{S}}_{ij} - \widetilde{\left\|\bar{\mathbf{S}}\right\|\bar{S}_{ij}} \tag{2.37}$$

la ecuación (2.36) se expresa mediante:

$$L_{ij} = \tfrac{1}{3}\left(T^{*(SGS)}_{kk} - \tilde{\tau}_{kk}^{(SGS)}\right)\delta_{ij} + 2\rho C_s^2\Delta^2 M_{ij} \tag{2.38}$$

o bien:

$$L_{ij} - \tfrac{1}{3}L_{kk}\delta_{ij} = 2\rho\left(C_S\Delta\right)^2 M_{ij} \tag{2.39}$$

La expresión (2.39) representa una relación de proporcionalidad entre dos tensores simétricos sin traza, es decir, se trata de cinco ecuaciones con una sola incógnita. No será posible, en general, que esta ecuación tenga solución exacta, pero sí puede obtenerse el valor de $(C_S\Delta)$ que minimiza la suma de los errores cuadráticos componente a componente de dicha igualdad tensorial:

$$\varepsilon = \sum_{i,j}\left[L_{ij} - \tfrac{1}{3}L_{kk}\delta_{ij} - 2\rho\left(C_S\Delta\right)^2 M_{ij}\right]^2 \tag{2.40}$$

Y de $\partial\varepsilon/\partial(C_S^2\Delta^2) = 0$, haciendo uso de que $\mathbf{M}$ no tiene traza, por lo que su contracción con el tensor identidad es nula, se llega a:

$$\left(C_S\Delta\right)^2 = \frac{L_{ij}M_{ij}}{2\rho M_{ij}M_{ij}} = \frac{\left(\tilde{\overline{v}}_i\tilde{\overline{v}}_j - \widetilde{\overline{v}_i\overline{v}_j}\right)\left(a^2\left\|\tilde{\overline{\mathbf{S}}}\right\|\tilde{\overline{S}}_{ij} - \widetilde{\left\|\overline{\mathbf{S}}\right\|\overline{S}_{ij}}\right)}{2\left(a^2\left\|\tilde{\overline{\mathbf{S}}}\right\|\tilde{\overline{S}}_{ij} - \widetilde{\left\|\overline{\mathbf{S}}\right\|\overline{S}_{ij}}\right)\left(a^2\left\|\tilde{\overline{\mathbf{S}}}\right\|\tilde{\overline{S}}_{ij} - \widetilde{\left\|\overline{\mathbf{S}}\right\|\overline{S}_{ij}}\right)} \tag{2.41}$$

En la expresión (2.41) todas las cantidades involucradas se pueden obtener a partir de las conocidas velocidades filtradas $\overline{v}_i$ aplicando convenientemente el operador filtrado grueso $\tilde{\cdot}$. El valor de a mayoritariamente asumido es $a = 2$.

El resultado (2.41) entra dentro de lo que se ha denominado modelos dinámicos, porque el valor de C_S se calcula dinámicamente, para cada instante temporal y para cada posición espacial. En otras palabras, se considera que $C_S = C_S(\mathbf{r},t)$ es una función con una descripción euleriana. Sin embargo, pueden aparecer algunos problemas mientras se realiza el cálculo anterior. Los más frecuentes son la posibilidad de que aparezcan viscosidades turbulentas negativas, puesto que nada impide que las L_{ij} y las M_{ij} sean menores que cero, y viscosidades turbulentas de cualquier signo grandes en valor absoluto, que generalmente son una consecuencia de que el denominador sea pequeño. Físicamente, estos pequeños valores del denominador implicarían que hay relativamente poca energía en las escalas pequeñas resueltas de la turbulencia, y por lo tanto no debe ser mucha la energía de las subescalas. En este caso, la viscosidad turbulenta debería ser pequeña, por lo que se produce una contradicción. Una solución para este problema podría ser simplemente imponer una restricción adicional en el rango en el que puede situarse la viscosidad turbulenta. Así, se establece un valor $\nu_{\max}$, tal que, si $\nu_T < 0$ se adopta $\nu_T = 0$ y si $\nu_T > \nu_{\max}$ se tomaría $\nu_T = \nu_{\max}$. Otra alternativa interesante es ampliar el procedimiento de mínimos cuadrados utilizado para ajustar C_S a lo largo de una región espacial finita, con lo que la expresión válida pasa a ser:

$$\left(C_S\Delta\right)^2 = \frac{\left\langle L_{ij}M_{ij}\right\rangle}{2\rho\left\langle M_{ij}M_{ij}\right\rangle} \tag{2.42}$$

donde los corchetes $\langle\cdot\rangle$ representan un promedio sobre la región espacial a la que el método de mínimos cuadrados ha sido aplicado. Esta región debe extenderse a lo largo de las direcciones espaciales homogéneas según el problema de que se trate, es decir, en turbulencia isótropa, debe ser todo el espacio, mientras que en turbulencia de pared se trataría de los planos paralelos a la misma. Otra posibilidad de interés utilizada en ocasiones consiste en realizar el promedio a lo largo de las trayectorias de las partículas fluidas.

Entre las ventajas del modelo dinámico frente al de Smagorinsky podemos destacar:

- Se sabe que para flujos con cortadura elevada, el valor requerido para la constante de Smagorinsky es mucho menor que en el caso de turbulencia isótropa: el modelo de Smagorinsky proporciona valores de viscosidad turbulenta demasiado grandes. Sin embargo, el modelo dinámico es capaz de corregir este problema.
- La definición de la longitud de filtrado no está clara cuando la malla no es igual de fina en las tres direcciones, pero este hecho carece de importancia si se utiliza el modelo dinámico, puesto que si ésta se toma de manera incorrecta, el modelo lo compensa cambiando el valor de la constante, ya que en realidad el modelo dinámico proporciona una estimación del producto $C_S\Delta$.
- El coste computacional adicional no es excesivamente alto, no superando normalmente el 40 – 50 % del total de la simulación.

2.6 MODELOS DE SIMILARIDAD DE ESCALA

Los modelos s*cale–similarity* o de similaridad de escala, representan una alternativa a los basados en la introducción de una viscosidad turbulenta. Este tipo de modelo fue propuesto por primera vez por Bardina *et al.* [1980]. La idea de fondo que hay detrás de esta técnica es simple: la naturaleza de los torbellinos más grades que son menores que la longitud del filtro, es decir los mayores de las SGS, es previsiblemente muy similar a la de los torbellinos más pequeños sí resueltos por nuestro modelo LES. Esto lo podemos observar mediante el siguiente razonamiento. El campo de velocidades resueltas, o de *grandes escalas* puede ser obtenido a partir del campo completo $\mathbf{v}$ mediante filtrado. Las SGS se obtendrían mediante la diferencia $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \overline{\mathbf{v}}$. En una primera aproximación, las escalas más grandes de entre las resueltas serían definidas mediante un filtrado doble $\overline{\overline{\mathbf{v}}}$, de modo que las más pequeñas de las resueltas vendrían definidas por $\overline{\mathbf{v}} - \overline{\overline{\mathbf{v}}}$. Por su parte, definiríamos las más grandes escalas no resueltas por medio de $\overline{\mathbf{v}'}$. Observamos inmediatamente que estos dos campos son exactamente el mismo.

Como consecuencia de esto, parece razonable la idea de que podemos aprovechar la información proporcionada por las escalas más pequeñas de entre

las resueltas para modelizar el comportamiento de la turbulencia en las SGS. Esto lleva al planteamiento de los modelos de *scale−similarity*, según los cuales la mejor manera de estimar el campo de velocidades v_i es mediante el campo filtrado $\overline{v}_i$. El modelo de Bardina *et al.* [1980] propone estimar el tensor de esfuerzos de subescala mediante:

$$\tau_{ij}^{(SGS)} = \rho\left(\overline{v}_i\overline{v}_j - \overline{v_i v_i}\right) \approx \left(\overline{\overline{v}}_i\overline{\overline{v}}_j - \overline{\overline{v}_i\overline{v}_j}\right) \tag{2.43}$$

sustituyendo directamente los valores desconocido de las v_i por los conocidos $\overline{v}_i$.

Otros autores como Layton y Lewandowsky [2003] prefieren modelizar directamente el término convectivo, en lugar de introducir el tensor de esfuerzos de subescala, haciendo:

$$\overline{v_i v_j} \approx \overline{\overline{v}_i\overline{v}_j} \tag{2.44}$$

2.7 MODELOS DE VISCOSIDAD TURBULENTA AVANZADOS

Según los defensores de estos modelos (véase por ejemplo Layton [2002]), existe una relación algo oscura entre la viscosidad turbulenta y la física involucrada en las fluctuaciones turbulentas si buscamos una dependencia funcional del tipo $\nu_T = \nu_T(\Delta, \mathbf{v}')$. Por el contrario, parece más razonable esperar que la cantidad de mezcla turbulenta de las magnitudes del flujo dependa particularmente de la energía cinética local asociada a las fluctuaciones turbulentas. Es decir, según esta hipótesis, lo correcto sería buscar una relación funcional del tipo:

$$\nu_T = \nu_T\left(\Delta, k'\right) \tag{2.45}$$

con $k' = \frac{1}{2} v'_i v'_i$, la energía cinética de subescala. La forma funcional más sencilla que es dimensionalmente correcta es la llamada relación de Kolmogorov-Prandtl:

$$\nu_T = C\Delta\sqrt{k'} \tag{2.46}$$

Una manera simple y directa de estimar k' es mediante la técnica de similaridad de escala:

$$k' = \frac{1}{2} v'_i v'_i \approx \frac{1}{2}\overline{v'_i}\cdot\overline{v'_i} = \frac{1}{2}\left(\overline{v}_i - \overline{\overline{v}}_i\right)\left(\overline{v}_i - \overline{\overline{v}}_i\right) \tag{2.47}$$

Finalmente, la propuesta es, en este caso:

$$\nu_T = \nu_0 \Delta \sqrt{\left(\overline{v}_i - \overline{\overline{v}}_i\right)\left(\overline{v}_i - \overline{\overline{v}}_i\right)} \tag{2.48}$$

El parámetro ν_0 puede ser estimado teóricamente adaptando el procedimiento de Lilly o bien calculado dinámicamente. Alternativamente, tras intercambio de la "norma 2" que aparece en la expresión (2.48) por una "norma 1", se obtiene la expresión más utilizada:

$$\nu_T = \nu_1 \Delta \sum_i \left|\overline{v}_i - \overline{\overline{v}}_i\right| \tag{2.49}$$

CAPÍTULO 3

MÉTODOS NUMÉRICOS

3.1 IMPORTANCIA DE LA ELECCIÓN DEL MÉTODO NUMÉRICO

Las simulaciones de grandes escalas son, si cabe, más vulnerables a los errores numéricos que otros tipos de cálculos computacionales, tales como la simulación numérica directa. Los modelos de subescala están planteados para tener en cuenta la física de las escalas de turbulencia no resueltas, pero no para compensar la acumulación de errores numéricos. En la práctica, fenómenos numéricos como el "aliasing" u otros errores pueden contaminar la solución obtenida. El remedio comúnmente utilizado para paliar estos inconvenientes consiste en incorporar algún tipo de difusión artificial para amortiguar inestabilidades y otros errores numéricos. Desafortunadamente, este enfoque suele llevar también a la no deseada amortiguación de procesos físicos junto con los errores, especialmente en simulaciones con una ancha banda de escalas que interaccionan entre ellas de forma no lineal. Incluso aunque la disipación artificial sea cuidadosamente confinada a las escalas más pequeñas, las escalas grandes continuarán viéndose afectadas por la interacción no lineal. Sin embargo, es posible lograr estabilidad numérica sin recurrir a la difusión artificial, mediante esquemas numéricos diseñados para satisfacer ciertos criterios de conservación.

La elección del método de resolución de las ecuaciones tiene gran relevancia en la práctica. Este hecho, se puso de manifiesto en los primeros

intentos de obtener la solución numérica al problema que se plantea. Se aplicó para ello un procedimiento basado en un método Runge–Kutta de orden tres, convenientemente descrito con todas sus variantes en la referencia Orlandi [2000], que desafortunadamente no arrojó resultados satisfactorios.

El método numérico finalmente adoptado, ha sido desarrollado en el *Center for Turbulence Research*, Stanford University, California. Más allá de lo expuesto en el presente capítulo, puede encontrarse documentación adicional sobre el mismo en Pierce y Moin [2001] y Wall *et al.* [2002].

3.2 ECUACIONES GOBERNANTES

El modelo de simulación de grandes escalas descrito en el capítulo anterior define completamente el problema físico que debe ser resuelto. Las ecuaciones gobernantes son la ecuación de continuidad y las ecuaciones de transporte de cantidad de movimiento. El modelo de subescala empleado en este trabajo es el de Smagorinsky, utilizando el enfoque dinámico para el cálculo de la viscosidad turbulenta. Todo ello se resume en el siguiente conjunto cerrado de ecuaciones:

$$\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \overline{v}_i \overline{v}_j}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\nu_{tot}\overline{S}_{ij}\right) \tag{3.2}$$

$$\nu_T = \left(C_S\Delta\right)^2 \left\|\overline{\mathbf{S}}\right\| \tag{3.3}$$

$$\left(C_S\Delta\right)^2 = \frac{\left\langle L_{ij}M_{ij}\right\rangle}{2\rho\left\langle M_{ij}M_{ij}\right\rangle} \tag{3.4}$$

con:

$$\nu_{tot} = \nu + \nu_T$$

$$L_{ij} = \rho\left(\tilde{\overline{v}}_i\tilde{\overline{v}}_j - \widetilde{\overline{v}_i\overline{v}_j}\right)$$

$$M_{ij} = a^2\left\|\tilde{\overline{\mathbf{S}}}\right\|\tilde{\overline{S}}_{ij} - \widetilde{\left\|\overline{\mathbf{S}}\right\|\overline{S}_{ij}} \qquad \text{(asumimos el valor a = 2)}$$

$$\|\overline{\mathbf{S}}\| = \sqrt{2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}}$$

$$\overline{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i}\right)$$

Las incógnitas del problema pasan a ser los valores filtrados de la velocidad $\overline{v}_i$ y la pseudopresión P^*. En adelante, operaremos siempre con magnitudes filtradas, y donde no exista ambigüedad posible, omitiremos la barra por simplicidad.

3.3 ECUACIONES DE CONSERVACIÓN

Considérese la ecuación de transporte de una magnitud conservada η para el caso de fluido incompresible:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (v_j \eta)}{\partial x_j} = 0 \tag{3.5}$$

La ecuación de continuidad establece el caso particular para $\eta = 1$:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \tag{3.6}$$

Estas ecuaciones expresan directamente la conservación de masa y de η, lo que se conoce como conservación primaria. A su vez, (3.5) y (3.6) implican la conservación de cualquier función $f(\eta)$:

$$\frac{\partial f(\eta)}{\partial t} + \frac{\partial [v_j f(\eta)]}{\partial x_j} = 0 \tag{3.7}$$

En particular, se conserva la función $f(\eta) = \eta^2 / 2$, llamada "η–energía". Esto se conoce como conservación secundaria.

Como consecuencia de la aparición en las ecuaciones (3.5) y (3.7) de la derivada temporal, es necesario considerar tanto la discretización espacial como la temporal a la hora de plantear un esquema numérico conservativo. Esto es, las derivadas espaciales y temporales deben ser discretizadas dentro de una relación específica de unas con otras de manera que el esquema resultante conduzca a ecuaciones discretas en las que se mantenga la conservación tanto primaria como secundaria.

3.4 MALLADO ESCALONADO

El esquema numérico que se utilizará está basado en un escalonamiento doble, tanto espacial como temporal de las componentes de la velocidad y de los escalares involucrados. Las componentes de la velocidad (denotamos por u la componente según x, v la componente según y y w la componente según z) están evaluadas en los centros de las caras de las celdas (posiciones naturales en cuanto a su papel jugado en la ecuación de continuidad) y en el instante $t_{n\text{-}1/2}$. Los escalares, que en este caso son la presión y la viscosidad turbulenta, son evaluados en los centros de las celdas y en el instante t_n (o equivalentemente, en el centro de las caras correspondientes de un hipercubo de cuatro dimensiones). Se adopta además el convenio de que las magnitudes definidas en las posiciones $x_{p-1/2}$ se denotan mediante el subíndice p (y análogamente para las otras direcciones espaciales) y las magnitudes definidas en el instante $t_{n-1/2}$ se denotan mediante el superíndice n. La Figura 3.1 nos muestra esquemáticamente proyecciones 2D de la disposición descrita.

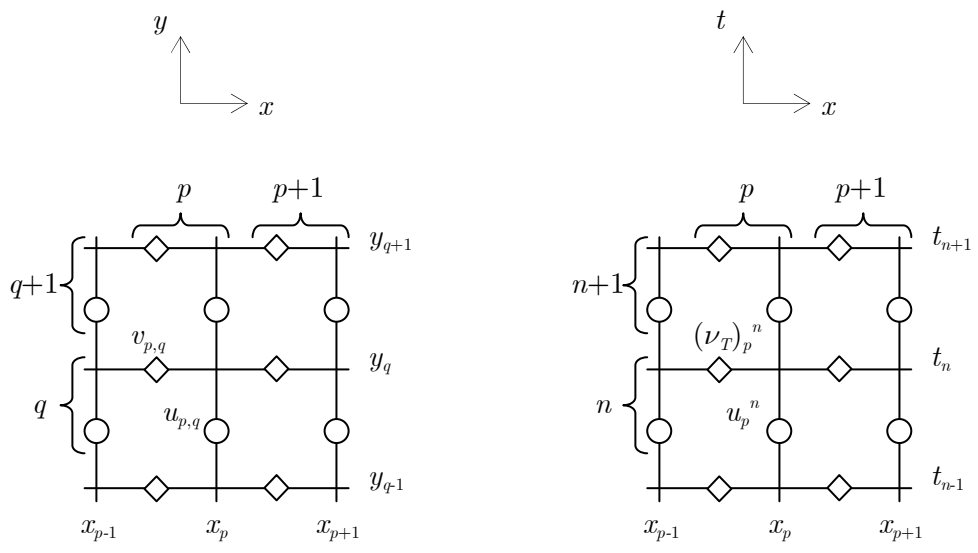

Figura 3.1. *Malla con escalonamiento espacial y temporal.*

La mayor ventaja de escalonar las componentes de la velocidad en el espacio y en el tiempo es la mejora en la estabilidad y precisión de la ecuación de continuidad que tiene lugar por el hecho de que la distancia de

discretización disminuye de 2Δ a Δ para las derivadas espacial y temporal. En efecto, analizando el comportamiento para cada componente espectral del flujo:

$$\frac{\partial e^{\iota kx}}{\partial x} \xrightarrow{\text{sin escalonamiento}} \frac{e^{\iota(x+\Delta x)} - e^{\iota k(x-\Delta x)}}{2\Delta x} = \iota \frac{\sin\left(k\Delta x\right)}{\Delta x} e^{\iota kx} = \iota k' e^{\iota kx}$$

$$\frac{\partial e^{\iota kx}}{\partial x} \xrightarrow{\text{con escalonamiento}} \frac{e^{\iota k\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)} - e^{\iota k\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)}}{\Delta x} = \iota \frac{2\sin\left(k\,\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} e^{\iota kx} = \iota k' e^{\iota kx}$$

frente al valor teórico de $\iota k e^{\iota kx}$. En la Figura 3.2 puede apreciarse como la segunda expresión para k' es considerablemente más exacta. El término asociado al gradiente de presión también mejora de esta manera, ya que las componentes de la velocidad están evaluadas en los mismos puntos que las correspondientes derivadas de la presión.

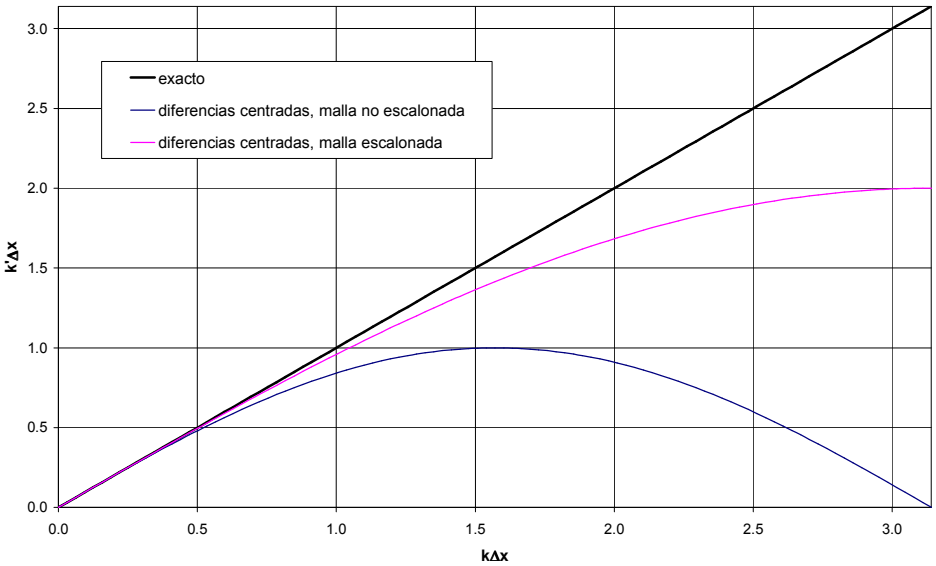

Figura 3.2. Diagrama de número de onda modificado para diferencias centradas de segundo orden con mallas escalonadas y no escalonadas.

Sin embargo, las mallas escalonadas no mejoran la precisión de las derivadas primeras que aparecen en los términos convectivos, debido a la interpolación adicional requerida para poder computar la derivada en el mismo punto que la variable. Por ejemplo:

$$\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p \rightarrow u_p\,\frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{p+\frac{1}{2}} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{p-\frac{1}{2}}\right) \rightarrow u_p\,\frac{1}{2}\left(\frac{u_{p+1}-u_p}{\Delta x} + \frac{u_p-u_{p-1}}{\Delta x}\right) = u_p\,\frac{u_{p+1}-u_{p-1}}{2\Delta x}$$

que es la expresión de diferencias centradas de segundo orden standard. Por lo tanto, la velocidad sigue siendo susceptible de acumular errores importantes, debido a la gran dispersión ocurrida a elevados números de onda (Figura 3.2). Sin embargo, debido al efecto restrictivo de la ecuación de continuidad, las mallas escalonadas son típicamente mucho menos vulnerables a estos errores de dispersión.

Las derivadas segundas pueden ser expresadas con precisión en términos de la aplicación repetida del operador derivada discreta:

$$\left.\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right|_p \rightarrow \frac{\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{p+\frac{1}{2}} - \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{p-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \rightarrow \frac{\frac{P_{p+1}-P_p}{\Delta x} - \frac{P_p-P_{p-1}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{P_{p+1}-2P_p+P_{p-1}}{\Delta x^2}$$

Esto permite, por ejemplo, obtener consistentemente una ecuación de Poisson discreta para la presión aplicando el operador divergencia discreta a las ecuaciones de trasporte de cantidad de movimiento discretas. Si esto se intenta en una malla no escalonada, se produce el conocido problema de desacoplamiento par–impar.

3.5 NOTACIÓN

Antes de presentar las ecuaciones discretas, es conveniente introducir una notación compacta y libre de índices propuesta por Piacsek y Williams [1970] y Morinishi et al. [1998]. Se trata de una notación útil para realizar manipulaciones algebraicas durante la discretización de las ecuaciones.

Las discretizaciones de segundo orden con frecuencia involucran las operaciones básicas de interpolación y discretización en una dirección espacial o temporal particular. Consideremos una situación con dos coordenadas en dos direcciones x e y en una malla uniforme con espaciados Δx y Δy e índices correspondientes p y q respectivamente. Definimos los operadores de interpolación:

$$
\begin{aligned}
(\varphi)_x\Big|_{p,q} &= \frac{\varphi_{p+\frac{1}{2},q} + \varphi_{p-\frac{1}{2},q}}{2} \\
(\varphi)_y\Big|_{p,q} &= \frac{\varphi_{p,q+\frac{1}{2}} + \varphi_{p,q-\frac{1}{2}}}{2}
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

y de diferenciación:

$$
\begin{aligned}
\delta_x(\varphi)\Big|_{p,q} &= \frac{\varphi_{p+\frac{1}{2},q} - \varphi_{p-\frac{1}{2},q}}{\Delta x} \\
\delta_y(\varphi)\Big|_{p,q} &= \frac{\varphi_{p,q+\frac{1}{2}} - \varphi_{p,q-\frac{1}{2}}}{\Delta y}
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

También introducimos el siguiente operador no lineal de interpolación:

$$
\underline{(\varphi\xi)}_x = 2(\varphi)_x(\xi)_x - (\varphi\xi)_x \tag{3.10}
$$

Para el caso con tres o más coordenadas (por ejemplo tres espaciales y una temporal) la generalización es inmediata.

Es inmediato comprobar que el error de interpolación o de diferenciación es de orden $O(\Delta x^2)$ ó $O(\Delta y^2)$ en todos los casos (también para el caso del operador no lineal de interpolación); por tanto se trata de un método de discretización espacial de segundo orden.

Nótese que cada uno de los operadores definidos en, (3.8), (3.9) y (3.10) produce un resultado que se encuentra escalonado con respecto al operando en la dirección especificada. Por ejemplo $(u)_x$ está desplazado una cantidad $\Delta x/2$ respecto a u en la dirección x.

Serán de utilidad más tarde las siguientes identidades, las cuales pueden ser comprobadas fácilmente sustituyendo las definiciones anteriores:

$$
[(\varphi)_x]_y = [(\varphi)_y]_x \equiv (\varphi)_{xy} \tag{3.11}
$$

$$
\delta_x[(\varphi)_y] = [\delta_x(\varphi)]_y \tag{3.12}
$$

$$
\delta_x(\varphi\xi) = (\varphi)_x\delta_x(\xi) + (\xi)_x\delta_x(\varphi) \tag{3.13}
$$

$$
\delta_x[\varphi(\xi)_x] = [\varphi\delta_x(\xi)]_x + \xi\delta_x(\varphi) \tag{3.14}
$$

En estas igualdades, φ y ξ son dos cantidades compatibles y x e y son dos direcciones coordenadas cualesquiera. Por cantidades compatibles debe entenderse que las mismas están definidas en localizaciones tales que la

expresión tenga sentido. Para ello, todos los términos sumados o multiplicados entre sí deben estar evaluados en exactamente el mismo conjunto de puntos. Por ejemplo, el producto $u(v)_x$ solo tiene sentido si v se encuentra escalonada con respecto a u en la dirección x, de manera que $(v)_x$ se alinea justo con u.

Por último, añadimos unos comentarios finales sobre la notación utilizada en el presente capítulo. En algunos casos se hace imprescindible introducir índices para designar la posición nodal que se considera. A este fin introduciremos la terna de números enteros p, q y r, siendo cada uno de ellos el que representa la posición en la malla en las direcciones del eje x, y y z respectivamente. Los subíndices i y j se reservan para indicar el número de componente espacial o componente vectorial o tensorial de cualquier magnitud empleada. Así pues, x_1, x_2 y x_3 se identifican respectivamente con x, y y z, mientras que v_1, v_2 y v_3 se identifican con u, v y w. El índice n denotará la posición nodal en la malla temporal. Finalmente, el subíndice k representará la aproximación obtenida como k–ésima iteración durante el cálculo.

3.6 LAS ECUACIONES DISCRETIZADAS

Estamos en condiciones ya de presentar el conjunto final de ecuaciones completamente discretizadas. Debe tenerse en mente que los subíndices i y j se utilizan en las expresiones subsiguientes para denotar una de las tres direcciones del espacio, y no una posición nodal. Nótese también que los subíndices del operador de interpolación quedan fuera del convenio de la suma indexada. Las ecuaciones de continuidad y transporte de cantidad de movimiento son, respectivamente:

$$\delta_{x_i}(v_i) = 0 \tag{3.15}$$

$$\delta_t(v_i) + \delta_{x_j}[(v_j)_{x_i t}(v_i)_{x_j t}] = -\delta_{x_i}(P^* / \rho) + \delta_{x_j}(\tau_{ij}) \tag{3.16}$$

siendo $\tau_{ij} = \begin{cases} (\nu_{tot})_{x_i x_j}\left(\delta_{x_j}[(v_i)_t] + \delta_{x_i}[(v_j)_t]\right) & i \neq j \\ 2\nu_{tot}\delta_{x_i}[(v_i)_t] & i = j \end{cases}$

La fórmula (3.16) proporciona una ecuación discretizada para cada una de las componentes de la velocidad. Dicha ecuación es evaluada en las posiciones espaciotemporales correspondientes a los vértices de las celdas en el diagrama de la derecha de la Figura 3.1, como puede comprobarse teniendo en cuenta el

desplazamiento introducido cada vez que son aplicados los operadores de interpolación y diferenciación.

En base a la identidad (3.14) podemos rescribir el miembro de la izquierda de (3.16) de la siguiente manera:

$$\delta_t(v_i) + \Big((v_j)_{x_i t}\delta_{x_j}[(v_i)_t]\Big)_{x_j} + (v_i)_t\delta_{x_j}[(v_j)_{x_i t}] = ... \tag{3.17}$$

y haciendo uso de (3.12) junto con la ecuación de continuidad (3.15) el último término se anula, reduciéndose a la *forma advectiva* de la ecuación de transporte de cantidad de movimiento:

$$\delta_t(v_i) + \Big((v_j)_{x_i t}\delta_{x_j}[(v_i)_t]\Big)_{x_j} = ... \tag{3.18}$$

3.6.1 PROPIEDADES CONSERVATIVAS DE LAS ECUACIONES DISCRETAS

Multiplicando (3.16) por $(v_i)_t$ y empleando (3.13) podemos reescribir el primer miembro de la siguiente manera:

$$\delta_t(\tfrac{1}{2}v_i^2) + (v_i)_t\delta_{x_j}[(v_j)_{x_i t}(v_i)_{x_j t}] = ... \tag{3.19}$$

El segundo término puede ser objeto de manipulación algebraica. Aplicando las identidades (3.13) y (3.14) así como la ecuación de continuidad:

$$(v_i)_t\delta_{x_j}[(v_j)_{x_i t}(v_i)_{x_j t}] =$$

$$\Big\{(v_j)_{x_i t}(v_i)_{x_j t}\delta_{x_j}[(v_i)_t]\Big\}_{x_j} + (v_i)_t\delta_{x_j}[(v_j)_{x_i t}(v_i)_{x_j t}] - \Big\{(v_j)_{x_i t}(v_i)_{x_j t}\delta_{x_j}[(v_i)_t]\Big\}_{x_j} =$$

$$\delta_{x_j}\Big\{(v_j)_{x_i t}(v_i)_{x_j t}(v_i)_{x_j t}\Big\} - \Big\{(v_j)_{x_i t}\delta_{x_j}[\tfrac{1}{2}(v_i)_t(v_i)_t]\Big\}_{x_j} =$$

$$\delta_{x_j}\Big\{(v_j)_{x_i t}(v_i)_{x_j t}(v_i)_{x_j t}\Big\} - \delta_{x_j}\Big\{(v_j)_{x_i t}[\tfrac{1}{2}(v_i)_t(v_i)_t]_{x_j}\Big\} =$$

$$\delta_{x_j}\Big((v_j)_{x_i t}\Big\{(v_i)_{x_j t}(v_i)_{x_j t} - [\tfrac{1}{2}(v_i)_t(v_i)_t]_{x_j}\Big\}\Big) = \delta_{x_j}\Big((v_j)_{x_i t}\,\tfrac{1}{2}\underline{[(v_i)_t(v_i)_t]}_{x_j}\Big)$$

por lo que (3.19) puede ser expresada en la forma conservativa:

$$\delta_t(\tfrac{1}{2}v_i^2) + \delta_{x_j}\Big((v_j)_{x_i t}\,\tfrac{1}{2}\underline{[(v_i)_t(v_i)_t]}_{x_j}\Big) = ... \tag{3.20}$$

La última expresión prueba que el presente esquema de ecuaciones discretas garantiza la conservación secundaria en términos exactos para el caso que nos ocupa.

Se puede realizar un análisis similar para el caso general en que la densidad es variable. La conclusión que se alcanza es que esta discretización conduce a un esquema conservativo salvo un término de orden $O(\Delta t^2)$. Sin embargo, se observa que, en particular, la conservación es exacta si se cumple para la densidad la relación $\delta_t(\rho) = 0$. Por supuesto esto sucede para el caso de densidad constante desarrollado anteriormente, y también en otras aplicaciones tales como el caso de movimiento fluido estacionario.

3.6.2 MALLAS DE ESPACIADO NO UNIFORME

En ocasiones se requiere refinar la malla en ciertas zonas de especial interés. Cuando se generalizan las ecuaciones (3.15) y (3.16) para espaciados no uniformes, los operadores de interpolación y diferenciación deben ser redefinidos mediante:

$$\begin{aligned} (u)_x\big|_{p+\frac{1}{2}} &= c_p u_{p+1} + (1-c_p)u_p \\ \delta_x(u)\big|_{p+\frac{1}{2}} &= \frac{u_{p+1}-u_p}{x_{p+1}-x_p} \end{aligned} \tag{3.21}$$

donde los c_p y $1-c_p$ son los pesos para la interpolación lineal. Estas definiciones mantienen formalmente una precisión de segundo orden para el operador de interpolación. Sin embargo, las identidades respecto al comportamiento de los productos (3.13) y (3.14) no son válidas, de modo que la conservación secundaria se satisface sólo aproximadamente. En la práctica, las simulaciones se comportan de forma estable para mallados suficientemente finos. Una posibilidad más robusta aunque seguramente menos precisa sería volver a utilizar pesos de interpolación iguales.

3.7 CÁLCULO DE LA VISCOSIDAD TURBULENTA

El modelo de cierre de Smagorinsky, utilizado en el presente trabajo, establece el papel de la viscosidad turbulenta. El cálculo de la misma se basa en el enfoque dinámico, descrito en el capítulo anterior, y que viene expresado

por las ecuaciones (3.3) y (3.4). Para ello, se hace necesario computar en cada punto los tensores:

$$L_{ij} = \rho\left(\tilde{\bar{v}}_i\tilde{\bar{v}}_j - \widetilde{\bar{v}_i\bar{v}_j}\right)$$

$$M_{ij} = a^2\left\|\tilde{\bar{\mathbf{S}}}\right\|\tilde{\bar{S}}_{ij} - \widetilde{\left\|\bar{\mathbf{S}}\right\|\bar{S}_{ij}}$$

a partir de los valores del campo de velocidad filtrado $\bar{\mathbf{v}}$. Durante este cálculo es necesario aplicar el operador "filtrado grueso" $\tilde{}$ a los diferentes campos fluidos. Tomamos un filtro unidimensional de tipo caja, definido mediante:

$$G_\Delta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta} & \text{si } |x| \le \dfrac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{si } |x| > \dfrac{\Delta}{2} \end{cases} \tag{3.22}$$

El valor de la anchura de filtrado se establece de manera que corresponda con el espaciado de malla Δx, y adoptando el valor $a = 2$, el ancho del filtro grueso es el doble que el del filtro fino, es decir $2\Delta x$. Se tiene que el filtrado unidimensional viene dado por:

$$\tilde{\varphi}(x_p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x')G_{2\Delta x}(x_p - x')dx' = \frac{1}{2\Delta x}\int_{x_p-\Delta x}^{x_p+\Delta x} \varphi(x')dx' \tag{3.23}$$

Y evaluando la integral mediante la regla de Simpson, la expresión a la que se llega es:

$$\tilde{\varphi}(x_p) \approx \tfrac{1}{6}\varphi_{p-1} + \tfrac{2}{3}\varphi_p + \tfrac{1}{6}\varphi_{p+1} \tag{3.24}$$

Observando este resultado, introducimos, de forma análoga a los operadores de interpolación y diferenciación, los operadores de filtrado:

$$\begin{aligned} F_x(\varphi)\big|_{p,q} &= \tfrac{1}{6}\varphi_{p+1,q} + \tfrac{2}{3}\varphi_{p,q} + \tfrac{1}{6}\varphi_{p-1,q} \\ F_y(\varphi)\big|_{p,q} &= \tfrac{1}{6}\varphi_{p,q+1} + \tfrac{2}{3}\varphi_{p,q} + \tfrac{1}{6}\varphi_{p,q-1} \end{aligned} \tag{3.25}$$

y también

$$F_{xy}(\varphi) = F_x\left[F_y(\varphi)\right] = F_y\left[F_x(\varphi)\right] \tag{3.26}$$

de manera que:

$$F_{xy}(\varphi)\Big|_{p,q} = \tfrac{1}{36}\left(\varphi_{p+1,q+1} + \varphi_{p+1,q-1} + \varphi_{p-1,q+1} + \varphi_{p-1,q-1}\right) + \\ + \tfrac{1}{9}\left(\varphi_{p,q+1} + \varphi_{p,q-1} + \varphi_{p+1,q} + \varphi_{p-1,q}\right) + \tfrac{4}{9}\varphi_{p,q} \tag{3.27}$$

El tensor $\overline{S}_{ij}$ es evaluado en el centro de la celda:

$$\overline{S}_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\delta_{x_j}\left[(\overline{v}_i)_{x_i x_j}\right] + \delta_{x_i}\left[(\overline{v}_j)_{x_i x_j}\right]\right) & i \neq j \\ \delta_{x_i}(\overline{v}_i) & i = j \end{cases} \tag{3.28}$$

y aplicamos:

$$L_{ij} = \rho\left(F_{xy}\left[(\overline{v}_i)_{x_j}\right] F_{xy}\left[(\overline{v}_j)_{x_i}\right] - F_{xy}\left[(\overline{v}_i)_{x_j}(\overline{v}_j)_{x_i}\right]\right) \tag{3.29}$$

$$M_{ij} = a^2 \left\| F_{xy}(\overline{\mathbf{S}}) \right\| F_{xy}\left(\overline{S}_{ij}\right) - F_{xy}\left(\|\overline{\mathbf{S}}\| \overline{S}_{ij}\right) \tag{3.30}$$

Sustituyendo esto en las expresiones (3.3) y (3.4) se completa el cálculo de la viscosidad turbulenta.

3.8 EL ESQUEMA ITERATIVO SEMI-IMPLÍCITO

El conjunto de ecuaciones discretas anterior, tal como está planteado en las ecuaciones (3.15) y (3.16) es completamente implícito. Esta característica proporciona gran parte de las propiedades de estabilidad y robustez del esquema, pero también lo convierte en altamente costoso. Es preferible adoptar un procedimiento iterativo semi–implícito de resolución que, manteniendo la mayoría de la estabilidad y precisión del esquema completamente implícito, sea a su vez razonablemente económico.

La discretización en (3.16) es similar al popular esquema Cranck–Nicolson de avance en el tiempo, ya que el miembro de la derecha es evaluado utilizando variables que han sido interpoladas temporalmente hasta el punto medio a partir de la solución en los instantes t^n y t^{n+1}. La parte temporal de la discretización puede escribirse mediante, $\delta_t(\mathbf{v}) = f[(\mathbf{v})_t]$, o bien, desarrollando la notación:

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} = f[\tfrac{1}{2}(\mathbf{v}^{n+1} + \mathbf{v}^n)] \tag{3.31}$$

Para una $f(\mathbf{v})$ lineal, esto es exactamente el esquema Cranck–Nicolson. Ahora bien, para una $f(\mathbf{v})$ no lineal, se trata de un sistema de ecuaciones algebraicas acopladas que debe ser resuelto por medio de iteraciones de Newton-Raphson. Sea ${\mathbf{v}_k}^{n+1}$ la k–ésima aproximación iterativa de $\mathbf{v}^{n+1}$. Aplicando el método de Newton-Raphson:

$$\left\{1-\tfrac{1}{2}\Delta t\mathbf{J}_f[\tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_k^{n+1}+\mathbf{v}^n)]\right\}(\mathbf{v}_{k+1}^{n+1}-\mathbf{v}_k^{n+1})=\mathbf{v}^n-\mathbf{v}_k^{n+1}+\Delta t f[\tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_k^{n+1}+\mathbf{v}^n)] \qquad (3.32)$$

donde $\mathbf{J}_f$ representa la matriz jacobiana de la función no lineal $f(\mathbf{v})$. La estimación inicial se toma ${\mathbf{v}_0}^{n+1} = \mathbf{v}^n$ y $(P^*)_0{}^n = (P^*)^{n-1}$. La viscosidad turbulenta es actualizada únicamente una vez por paso temporal, debido a su alto coste computacional.

Si se desprecia el término debido al jacobiano en (3.32), aparece un esquema iterativo explícito, dado por:

$$\mathbf{v}_{k+1}^{n+1}=\mathbf{v}^n+\Delta t f[\tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_k^{n+1}+\mathbf{v}^n)] \qquad (3.33)$$

Este esquema tiene algunas propiedades de estabilidad interesantes en función del número de iteraciones llevadas a cabo en cada paso temporal. Las propiedades de estabilidad lineal del esquema pueden determinarse por medio del análisis del problema lineal $d\mathbf{v}/dt = \lambda\mathbf{v}$. Puede establecerse la región del plano complejo en la que deben moverse los autovalores λ para la que el esquema iterativo (3.33) cumpla el criterio de estabilidad $|\mathbf{v}^{n+1}| \leq |\mathbf{v}^n|$:

- Para el caso con una iteración, debe cumplirse $|1+\lambda\Delta t| \leq 1$
- Para el caso con $m \geq 2$ iteraciones se obtiene la cndición:

  $$\left|1+\lambda\Delta t+\tfrac{1}{2}(\lambda\Delta t)^2+...+\tfrac{1}{2^{m-1}}(\lambda\Delta t)^m\right| \leq 1$$

- Para infinitas iteraciones se tiene que si $|\lambda\Delta t| \leq 2$, entonces el esquema iterativo converge hacia (3.31), siendo la región de estabilidad tal que:

  $$\left|\frac{2+\lambda\Delta t}{2-\lambda\Delta t}\right| \leq 1\text{, es decir, } \mathrm{Re}(\lambda\Delta t) \leq 0.$$

Las regiones de estabilidad para una, dos, tres, cuatro e infinitas iteraciones pueden verse representadas en la Figura 3.3. Se requiere al menos dos iteraciones para que el esquema alcance precisión de segundo orden. Iteraciones adicionales pueden mejorar la estabilidad, pero no el orden de precisión. Cuando se realizan tres iteraciones, el método presenta unos límites de estabilidad en el eje imaginario similares a los del método Runge–Kutta de

tercer orden, que también se muestra en el gráfico a efectos de comparación. Como se observa, los límites de estabilidad lineal no aumentan significativamente más allá de tres iteraciones, de modo que en base a un equilibrio entre economía y estabilidad, el número óptimo de iteraciones por paso puede establecerse en tres.

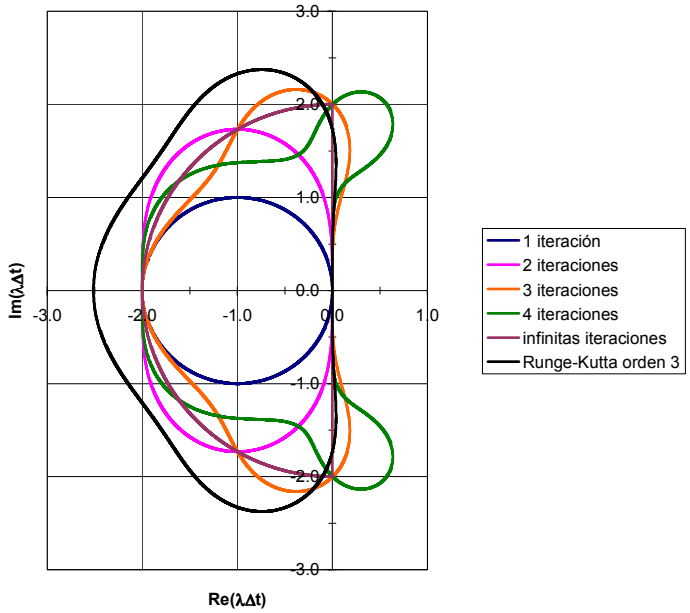

Figura 3.3. *Regiones de estabilidad lineal para* 1, 2, 3, 4 *e infinitas iteraciones. Se muestra también la de Runge-Kutta de tercer orden, a efectos comparativos.*

Sin embargo, el objetivo final del presente esquema iterativo no es incrementar los límites de estabilidad lineal, sino obtener *estabilidad no lineal*, así como mantener las propiedades conservativas de las ecuaciones discretas (3.16). Lo adecuado para ello es mantener el término asociado al jacobiano en (3.32), pero el consiguiente aumento en el coste computacional puede hacer inviable esta opción. Los esquemas semi–implícitos surgen al simplificar convenientemente el jacobiano. Escogiendo juiciosamente los términos tratados implícitamente y los evaluados explícitamente, se puede obtener un resultado satisfactorio que sea suficientemente económico. Normalmente sólo se computan de forma implícita los términos más rígidos, tales como las derivadas en una dirección coordenada que presenta mucha mayor variación en los espaciados de malla que las otras. Por ejemplo, cuando existe refinamiento

de malla cerca de una pared, sólo las derivadas en la dirección normal a la pared reciben tratamiento implícito. En el presente trabajo, los términos retenidos en el jacobiano son, para las tres componentes de la velocidad, los de advección y difusión en dirección perpendicular a la pared (dirección del eje y). De esta manera, (3.32) deriva en un sistema de ecuaciones lineales tridiagonal para cada componente:

$$A_i^q \left(\Delta v_i\right)_{p,q+1,r} + B_i^q \left(\Delta v_i\right)_{p,q,r} + C_i^q \left(\Delta v_i\right)_{p,q-1,r} = RHS_i^r \tag{3.34}$$

donde el incremental solución de dicho sistema de ecuaciones representa:

$$\left(\Delta \mathbf{v}\right)_{p,q,r} = \left(\mathbf{v}_{k+1}^{n+1} - \mathbf{v}_k^{n+1}\right)_{p,q,r} \tag{3.35}$$

A modo de ejemplo para ilustrar el método, consideremos la ecuación para la primera componente u. Atendiendo a (3.16), el valor de f está dado por:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}) = & -\delta_x\left[(u)_x(u)_x\right] - \delta_y\left[(u)_y(v)_x\right] - \delta_z\left[(u)_z(w)_x\right] - \delta_x\left(P^* / \rho\right) + \\ & + \delta_x\left[2\nu_{tot}\delta_x(u)\right] + \delta_y\left[\left(\nu_{tot}\right)_{xy}\left(\delta_y(u) + \delta_x(v)\right)\right] + \delta_z\left[\left(\nu_{tot}\right)_{xz}\left(\delta_z(u) + \delta_x(w)\right)\right] \end{aligned} \tag{3.36}$$

Para calcular el jacobiano, retenemos sólo los términos segundo y sexto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{v})}{\partial u_{p,q+1,r}} &= -\frac{1}{2\Delta y}(v)_x\Big|_q + \frac{1}{\Delta y^2}(\nu_{tot})_{xy}\Big|_q \\ \frac{\partial f(\mathbf{v})}{\partial u_{p,q,r}} &= -\frac{1}{2\Delta y}(v)_x\Big|_q + \frac{1}{2\Delta y}(v)_x\Big|_{q-1} - \frac{1}{\Delta y^2}(\nu_{tot})_{xy}\Big|_q - \frac{1}{\Delta y^2}(\nu_{tot})_{xy}\Big|_{q-1} \\ \frac{\partial f(\mathbf{v})}{\partial u_{p,q-1,r}} &= +\frac{1}{2\Delta y}(v)_x\Big|_{q-1} + \frac{1}{\Delta y^2}(\nu_{tot})_{xy}\Big|_{q-1} \end{aligned} \tag{3.37}$$

Tanto el jacobiano como el término de f deben ser evaluados en $(\mathbf{v}_k^{n+1}+\mathbf{v}^n)/2$, y aplicando (3.32) obtenemos el mencionado sistema tridiagonal. De forma completamente análoga operamos para las otras componentes de la velocidad.

Tras la resolución para cada componente del sistema tridiagonal anterior, se obtiene una estimación de la velocidad, que denotaremos $\widehat{\mathbf{v}}_{k+1}^{n+1}$, que en general no es solenoidal. Para corregir esta desviación y a la vez tener en cuenta la ecuación de continuidad, se utiliza un esquema de *paso fraccionado*. El término asociado a la presión introducido en (3.36) que lleva a la obtención del estimador anterior $\widehat{\mathbf{v}}_{k+1}^{n+1}$ se calcula en un primer momento con los últimos valores de presión conocidos. Estos valores de presión se actualizan, y las

consecuencias de esta corrección de la presión en la ecuación de cantidad de movimiento se evalúan después de forma explícita dando lugar al nuevo campo de velocidades, que ahora sí satisface la ecuación de continuidad. Para ello, denotando mediante $(\Delta P^*)^n_{k+1}$ la diferencia de presiones entre dos iteraciones sucesivas, imponemos la ecuación de Poisson:

$$\delta_{x_i}\Big[\delta_{x_i}(\Delta P^{*n}_{\ k+1})\Big] = \frac{\rho}{\Delta t}\delta_{x_i}(\widehat{v}_i\big|^{n+1}_{k+1}) \tag{3.38}$$

Finalmente tomamos:

$$P^{*n}_{\ k+1} = P^{*n}_{\ k} + \Delta P^{*n}_{\ k+1} \tag{3.39}$$

y:

$$v_i\big|^{n+1}_{k+1} = \widehat{v}_i\big|^{n+1}_{k+1} - \frac{\Delta t}{\rho}\delta_{x_i}(\Delta P^{*n}_{\ k+1}) \tag{3.40}$$

lo que introduce el efecto asociado a la corrección de la presión en la ecuación de cantidad de movimiento al mismo tiempo que se garantiza que el nuevo campo de velocidades $\mathbf{v}^{n+1}$ cumple la ecuación de continuidad discreta (3.15).

La resolución de la ecuación de Poisson (3.38) se realiza mediante técnicas espectrales. Información detallada sobre este procedimiento numérico ha sido recogida en el Apéndice B.

CAPÍTULO 4

MODELO DE FLUJO

4.1 FLUJO INCIDENTE SOBRE LA TURBINA

Uno de los objetivos de esta Tesis es, no sólo realizar una simulación de grandes escalas de la turbulencia en una estela de aeroturbina, sino simular también el entorno en que se realiza. Las condiciones de turbulencia de la atmósfera son complejas. De especial importancia son las propiedades de anisotropía de la misma, impuestas por la presencia del suelo. Las fluctuaciones de la velocidad en las direcciones longitudinal y transversal (paralelas al suelo) y vertical presentan, por tanto, un comportamiento estadístico diferente y además existe una correlación entre las fluctuaciones longitudinales y verticales relacionada con el esfuerzo de cortadura de la corriente. Los valores para las componentes diagonales del tensor de esfuerzos de Reynolds fueron estimadas por Panofsky y Dutton [1984] a partir de una serie de resultados experimentales. A su vez, estos valores vienen indicados en las normas internacionales:

$$\tau_{xx}^{(Re)} = -\rho \left\langle v_x' v_x' \right\rangle = -5,76\rho u_*^2 \tag{4.1}$$

$$\tau_{yy}^{(Re)} = -\rho \left\langle v_y' v_y' \right\rangle = -1,56\rho u_*^2 \tag{4.2}$$

$$\tau_{zz}^{(Re)} = -\rho \left\langle v_z' v_z' \right\rangle = -3,69\rho u_*^2 \tag{4.3}$$

siendo:

$$\tau_{xy}^{(Re)} = -\rho \left\langle v_x' v_y' \right\rangle = \rho u_*^2 \tag{4.4}$$

la definición de la velocidad de fricción.

Es deseable que la simulación de la estela se produzca en el seno de un flujo con propiedades similares a las de la atmósfera. Un flujo incidente sobre la turbina que presente turbulencia isótropa previsiblemente no arrojará resultados fiables, ni tampoco una extrema anisotropía muy alejada de la propia de la atmósfera sería de interés. Por otro lado realizar la simulación en ausencia de cortadura podría también llevar a resultados no válidos, alejados de las medidas experimentales obtenidas en campo.

4.1.1 DOMINIO DE CÁLCULO

El dominio de cálculo es un cajón paralelepípedo, tal como puede verse en la Figura 4.1. Se trata de un flujo en canal, en que el fluido transcurre entre dos planos paralelos impermeables. La dirección del eje x se ha hecho coincidir con la dirección de la velocidad media del fluido. El eje y se toma perpendicular a los planos que constituyen el canal, y la dirección del eje z es la perpendicular a las otras dos. Se han tomado las siguientes dimensiones para el recinto, en relación con el tamaño de la turbina: L_x=34,9D, L_y=5,6D, y L_z=10,7D.

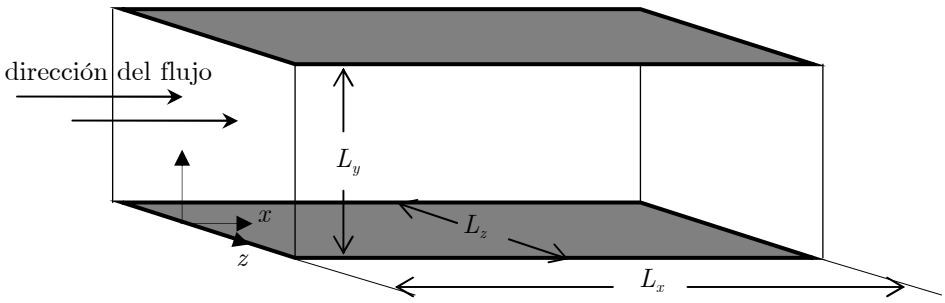

Figura 4.1. *Vista esquemática del dominio de cálculo.*

4.1.2 CONDICIONES DE CONTORNO

4.1.2.1 *Condiciones de contorno en la entrada y salida del dominio*

Los flujos turbulentos que presentan una evolución espacial y temporal requieren una condición de contorno apropiada en la sección de entrada, es decir, demandan una serie temporal de datos de turbulencia con una coherencia espacial apropiada. Este hecho supone un reto de dificultad considerable cuando en la frontera de entrada no sólo deben tomar valores concretos los promedios de las magnitudes fluidas, sino también sus propiedades estadísticas, en particular, por ejemplo, las componentes del tensor de Reynolds.

Se han ensayado diferentes métodos para conseguir una serie temporal de campos de velocidades con unos valores medios y un tensor de Reynolds dados, que puedan servir como condiciones de contorno de entrada:

a) Método de generación de condiciones de contorno de entrada mediante fluctuaciones aleatorias:

   Supongamos conocidos en la sección de entrada los valores de las velocidades medias $V_i(y)=\langle v_i(x=0)\rangle_z$ y de las correlaciones de las componentes de velocidad $R_{ij}(y)=\langle v_i(x,y,z)v_j(x,y,z)\rangle$ (en relación directa con el tensor de esfuerzos de Reynolds). Para cada posición a lo largo de la dirección y, se procede como sigue:

   - Se genera un conjunto de tres secuencias de números aleatorios $\dot{v}_x(z)$, $\dot{v}_y(z)$ y $\dot{v}_z(z)$ (un número aleatorio para cada posición a lo largo de la dirección z) condicionadas de manera que cada una de ellas tenga media nula, varianza unidad y covarianza nula con cualquiera de las otras dos distribuciones:

$$\begin{aligned} &\langle \dot{v}_i(z)\rangle_z = 0 \\ &\langle \dot{v}_i(z)\dot{v}_j(z)\rangle_z = \delta_{ij} \end{aligned} \tag{4.5}$$

   - A continuación, el campo de velocidades en la sección de entrada se construye mediante:

$$\begin{aligned} &v_i(0,y,z) = V_i(y) + v'_i(z) \\ &v'_i(z) = a_{ij}\dot{v}_j(z) \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde los elementos del tensor de amplitud a_{ij} se relacionan con el tensor de correlaciones R_{ij} mediante el conjunto de identidades siguiente:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \sqrt{R_{11}} \\
a_{21} &= R_{21} \,/\, a_{11} \\
a_{31} &= R_{31} \,/\, a_{11} \\
a_{22} &= \sqrt{R_{22} - a_{21}^2} \\
a_{32} &= (R_{32} - a_{21}a_{31}) \,/\, a_{22} \\
a_{33} &= \sqrt{R_{33} - a_{31}^2 - a_{32}^2} \\
a_{ij} &= 0 \qquad \text{si } i < j
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Puede comprobarse inmediatamente en base a las relaciones (4.6), que $\langle v'_i(z) \rangle_z = 0$ y $\langle v'_i(z) v'_j(z) \rangle_z = R_{ij}$.

Este procedimiento garantiza que los niveles de turbulencia y correlaciones entre las fluctuaciones de velocidad obtenidos son exactamente los valores que queremos. Sin embargo, desafortunadamente las fluctuaciones están totalmente decorreladas en el espacio y en el tiempo. Por esta razón, la longitud de onda típica de las oscilaciones espaciales del campo de velocidades es muy pequeña, y esto hace que la turbulencia así introducida decaiga muy rápidamente, de modo que unas pocas secciones aguas abajo desde la de entrada desaparece prácticamente por completo.

b) El modelo de Mann

En Mann [1998] se propone un eficiente algoritmo para simular un campo de viento turbulento basado en un modelo para el tensor espectral de la turbulencia de la capa límite atmosférica enunciado en Mann [1994]. Este método ha sido incluido en la normativa internacional IEC 61400-1 Ed.3 [2005] por sus aplicaciones a la hora de realizar una correcta estimación de las cargas dinámicas sobre aeroturbinas. El modelo de Mann permite obtener un campo de dos o tres dimensiones para dos o tres componentes del vector de fluctuaciones de velocidad. El resultado del modelo es, por tanto, un campo de velocidades instantáneo en todos los puntos de un retículo cartesiano tridimensional con unas características

turbulentas similares a la de la atmósfera. No es posible, sin embargo, imponer valores exactos para las componentes del tensor de Reynolds, si bien se consigue una aproximación razonable a los valores de interés. En base a las hipótesis de la llamada *rapid distortion theory* se puede obtener una serie temporal de valores, haciendo equivalente las variaciones de la velocidad con el tiempo a un desplazamiento dentro del retículo cartesiano con velocidad igual a la velocidad media del campo fluido. De esta forma es posible conseguir condiciones de contorno con propiedades turbulentas apropiadas en la sección de entrada del recinto de cálculo. Con todo, debido a que el campo fluido obtenido a partir del modelo de Mann no es solución de las ecuaciones de transporte de la cantidad de movimiento, la turbulencia introducida en la sección de entrada termina decayendo aguas abajo al alejarnos de la sección de entrada. Este decaimiento es notablemente más lento que en el caso de la generación de condiciones de contorno de entrada mediante fluctuaciones aleatorias, pero aun así impide que sea posible realizar la simulación con valores razonables de turbulencia en el flujo incidente, pues la región en la que encontramos valores similares a los de los parámetros atmosféricos se reduce muchísimo.

c) Existe la posibilidad de realizar una simulación independiente con el objeto de generar las condiciones de entrada. Para ello se utilizan condiciones de contorno periódicas entre la sección de entrada y la de salida y se almacenan en disco los datos obtenidos para cada paso temporal en una sección cualquiera. Sin embargo, el coste adicional de recursos informáticos para realizar esta simulación tanto en tiempo CPU como en espacio de disco convierte en desaconsejable esta opción, al menos para nuestros propósitos.

La solución finalmente adoptada consiste en ampliar suficientemente las dimensiones del recinto de cálculo e imponer condiciones de contorno periódicas en la dirección longitudinal del flujo. Con este procedimiento no tenemos margen de actuación sobre los valores de turbulencia ni sobre el perfil de velocidades medias. Sin embargo, las condiciones de anisotropía debida a la presencia de la pared inferior son similares a las de la capa límite atmosférica, por lo que es de esperar que los resultados sean satisfactorios. Posteriormente

comprobaremos que, en efecto, el perfil de velocidades así obtenido cumple la ley logarítmica de la pared para el caso de pared rugosa:

$$\langle v_x \rangle = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0} \tag{4.8}$$

expresión en la que intervienen la velocidad de fricción u_*, la constante de von Karman $\kappa = 0{,}4$ e y_0, que representa la rugosidad de la superficie. También comprobaremos que las componentes del tensor de Reynolds están próximas a los valores experimentales para la atmósfera.

El hecho de adoptar condiciones de contorno periódicas tiene diversas consecuencias. La primera de ellas es que realmente no se simula una única turbina aislada, sino una hilera de infinitas turbinas separadas la distancia L_x, del orden de 35 veces el diámetro del rótor de la máquina, una separación que se considera suficiente para que no existan efectos de iteración entre ellas. La segunda consecuencia importante es que no se dispone de ningún mecanismo de control de las propiedades turbulentas del flujo incidente o no perturbado obtenido numéricamente, por lo que deberemos comprobar a posteriori que las características de la turbulencia son similares a las del viento real en la capa límite atmosférica, y por tanto apropiadas para realizar las simulaciones de la estela.

Matemáticamente las condiciones de contorno periódicas se expresan mediante la igualdad de los valores e igualdad de las derivadas de las magnitudes fluidas:

$$v_i\big|_{x=0} = v_i\big|_{x=L_x} \qquad\qquad P^*\big|_{x=0} = P^*\big|_{x=L_x} \tag{4.9}$$

$$\left.\frac{\partial v_i}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial v_i}{\partial x}\right|_{x=L_x} \qquad\qquad \left.\frac{\partial P^*}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial P^*}{\partial x}\right|_{x=L_x} \tag{4.10}$$

4.1.2.2 *Condición de contorno en los bordes inferior y superior del recinto*

El borde inferior del dominio de cálculo, $y = 0$ (véase Figura 4.1) representa el terreno. Así pues, la condición de contorno en este punto debe representar el tipo de interacción entre el flujo y el suelo. No puede ser la clásica *no−slip*, ya que debido al altísimo número de Reynolds la subcapa viscosa de la capa límite es incluso más pequeña que el tamaño de la rugosidad local de la superficie y es imposible, por tanto resolver completamente el flujo

en la subcapa viscosa. Una fórmula frecuentemente utilizada en meteorología adopta:

$$v_y\big|_{y=0} = 0 \tag{4.11}$$

$$\rho\nu_{tot}\left.\frac{\partial v_i\,(x,y,z)}{\partial y}\right|_{y=0} = \tau_{iy}\,(x,z) \qquad (i = x,z) \tag{4.12}$$

donde $\tau_{iy}(x,z)$ representa la distribución espacial de las componentes del esfuerzo de cortadura en el plano inferior. Senocak *et al.* [2004] proponen para los esfuerzos de cortadura:

$$\tau_{iy}\,(x,z) = \rho\kappa^2\left[\ln\left(\frac{d}{y_0}\right)\right]^{-2} v_h\,(x,z)\,v_i\,(x,d,z) \qquad (i = x,z) \tag{4.13}$$

con:

$$v_h\,(x,z) = \sqrt{v_x\,(x,d,z)^2 + v_z\,(x,d,z)^2} \tag{4.14}$$

En la expresión (4.13) d representa la distancia del primer nodo a la pared. Obsérvese que esta fórmula es consistente con la ley logarítmica de la pared (4.8), a pesar de que ésta debe entenderse en un sentido de promedio temporal, mientras que en (4.13) operamos con valores instantáneos y locales de los esfuerzos de cortadura. En efecto, si tomamos el módulo de la expresión (4.13):

$$\tau\,(x,z) = \sqrt{\tau_{xy}\,(x,z)^2 + \tau_{yz}\,(x,z)^2} = \rho\kappa^2\left[\ln\left(\frac{d}{y_0}\right)\right]^{-2} v_h\,(x,z)^2$$

$$v_h(x,z) = \frac{1}{\kappa}\sqrt{\frac{\tau(x,z)}{\rho}}\ln\left(\frac{d}{y_0}\right)$$

cumpliéndose la ley logarítmica de la velocidad localmente y de forma instantánea, si entendemos el valor de $(\tau(x,z)/\rho)^{1/2}$ como una velocidad de fricción local. Esta ley se cumple también para los valores promedio, ya que en la práctica: $\left\langle v_h(x,z)^2\right\rangle \approx \left\langle v_h(x,z)v_x(x,d,z)\right\rangle \approx \left\langle v_x(x,d,z)^2\right\rangle \approx \left\langle v_h(x,z)\right\rangle^2 \approx \left\langle v_x(x,d,z)\right\rangle^2$

Otros autores plantean enfoques muy similares. En Moeng [1984] se da una expresión muy cercana a (4.13), prácticamente idéntica en la práctica, aunque algo más complicada:

$$\tau_{iy}\,(x,z) = C_D v_h\,(x,z)\,v_i\,(x,d,z) \qquad (i = x,z) \tag{4.15}$$

con

$$C_D = \rho\kappa^2 \left[\ln\left(\frac{d}{y_0}\right)\right]^{-2} \frac{\left\langle v_x(x,d,z)\right\rangle^2}{\left\langle v_x(x,d,z)v_h(x,z)\right\rangle} \tag{4.16}$$

Piomelli y Balaras [2002] utilizan una expresión también muy parecida:

$$\tau_{iy}(x,z) = \rho\kappa^2 \left[\ln\left(\frac{d}{y_0}\right)\right]^{-2} \left\langle v_x(x,d,z)\right\rangle v_i(x,d,z) \qquad (i = x,z) \tag{4.17}$$

En Granados [2003] se suaviza la condición de esfuerzo de cortadura local, tomando un valor del esfuerzo de cortadura uniforme en todo el plano, adoptando:

$$\tau_{xy}(x,z) = \rho\kappa^2 \left[\ln\left(\frac{d}{y_0}\right)\right]^{-2} \left\langle v_x(x,d,z)\right\rangle^2 \tag{4.18}$$

$$\tau_{yz}(x,z) = 0 \tag{4.19}$$

En todos los casos, la velocidad de fricción global sobre la superficie se calcula del valor promedio del esfuerzo de cortadura mediante:

$$\rho u_*^2 = \left\langle \tau_{xy}(x,z)\right\rangle \tag{4.20}$$

El enfoque finalmente adoptado en el presente trabajo es el dado por la ecuación (4.13), tras haberse comprobado que en la práctica todos ellos son prácticamente equivalentes.

En el borde superior del recinto, $y = L_y$, se imponen condiciones de contorno que garantizan que se alcanza una situación de esfuerzo de cortadura constante, es decir, sin variación a lo largo del eje y. En cierta forma se trata de obtener unas condiciones similares a las que se dan en una corriente laminar de Couette, si bien en nuestro caso el esfuerzo de cortadura debe entenderse en un sentido turbulento. Aplicamos:

$$v_y\big|_{y=L_y} = 0 \tag{4.21}$$

$$\rho\nu_{tot} \left.\frac{\partial v_x}{\partial y}\right|_{y=L_y} = \rho u_*^2 \tag{4.22}$$

$$\left.\frac{\partial v_z}{\partial y}\right|_{y=L_y} = 0 \tag{4.23}$$

De esta manera, el esfuerzo realizado por el plano superior sobre el fluido es siempre el mismo y de sentido contrario al ejercido por el plano inferior, proporcionando el empuje necesario para mantener el movimiento fluido en régimen estacionario, conservándose constante el caudal sin necesidad de imponer un gradiente de presión externo.

Finalmente, añadamos que para la presión se emplean condiciones de contorno de von Neumann:

$$\left.\frac{\partial P^*}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial P^*}{\partial y}\right|_{y=L_y} = 0 \tag{4.24}$$

4.1.2.3 *Condiciones de contorno en las caras laterales del dominio*

En las caras laterales del canal, $z = \pm L_z/2$, se aplican condiciones de contorno periódicas:

$$v_i\big|_{z=-\frac{L_z}{2}} = v_i\big|_{z=+\frac{L_z}{2}} \qquad P^*\big|_{z=-\frac{L_z}{2}} = P^*\big|_{z=+\frac{L_z}{2}} \tag{4.25}$$

$$\left.\frac{\partial v_i}{\partial z}\right|_{z=-\frac{L_z}{2}} = \left.\frac{\partial v_i}{\partial z}\right|_{z=+\frac{L_z}{2}} \qquad \left.\frac{\partial P^*}{\partial z}\right|_{z=-\frac{L_z}{2}} = \left.\frac{\partial P^*}{\partial z}\right|_{z=+\frac{L_z}{2}} \tag{4.26}$$

4.2 MODELO DE TURBINA

El paso siguiente es introducir en el seno de la corriente de viento un modelo de aeroturbina que nos permita simular el efecto que la presencia de ésta ejerce sobre el flujo incidente, modificando las propiedades fluidas en la estela.

El disco circular barrido por el rótor es aproximado por un conjunto de celdas rectangulares en una malla cartesiana. El modelo introduce en ellas una fuerza de volumen o sumidero de cantidad de movimiento proporcional al área de cada celda y al cuadrado de la velocidad media incidente en la celda central del disco (ver Figura 4.2):

$$f_x = -C_T \cdot \tfrac{1}{2} A V_0^2 \tag{4.27}$$

C_T representa el coeficiente de empuje de la aeroturbina, A es el área frontal de la celda y V_0 es la velocidad no perturbada del flujo incidente a la altura del eje del rótor. La fuerza tiene la dirección del eje x y sentido opuesto al de la velocidad media del viento, y por tanto decelera la corriente incidente. Este modelo sencillo se engloba dentro del tipo de modelos denominados de *disco actuador*, ocasionalmente utilizados para simular aeroturbinas. La sombra de la torre podría también ser simulada mediante una distribución de sumideros de momento; sin embargo, dado que el área frontal de la torre es mucho más pequeña que la del disco, y se espera que los coeficientes de empuje de torre y disco sean bastante similares, el efecto de la torre ha sido despreciado.

Con este modelo de turbina, los álabes reales de la misma no son tenidos en cuenta. No estamos interesados en las propiedades del flujo en interacción directa con los álabes de la aeroturbina, sino en la evolución de las características del flujo aguas abajo. Según Larsen *et al.* [2003] la extensión de la región interna de la estela, en la que las estructuras vorticales asociadas a los álabes pueden ser identificadas, es sólo del orden de un diametro del rótor, de modo que para nuestros propósitos podemos no considerar estos fenómenos.

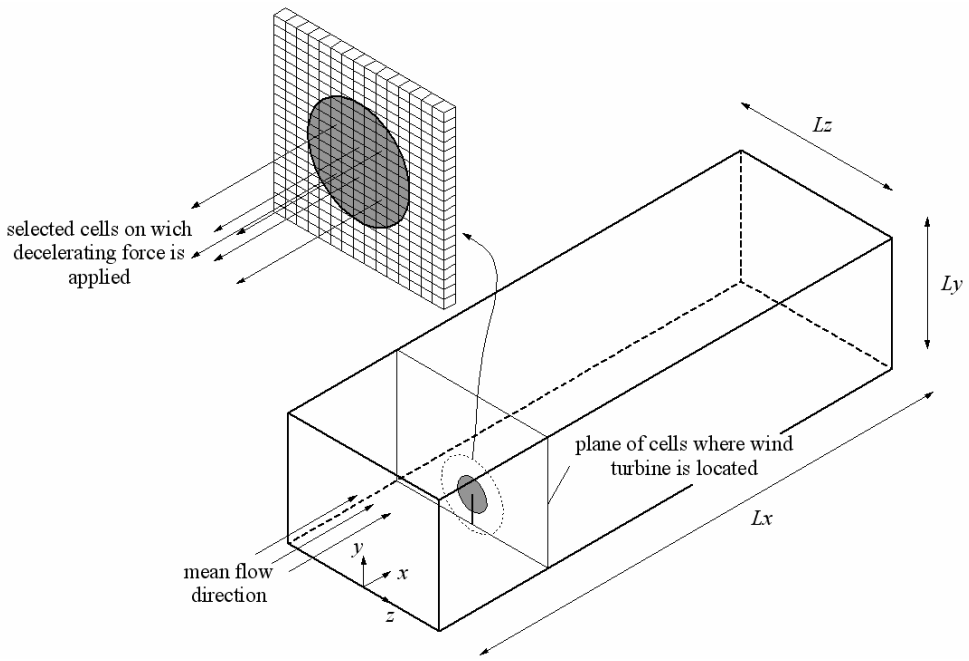

Figura 4.2. *Representación esquemática del modelo de aeroturbina.*

Sin embargo, tenemos especial interés en el estudio de la turbulencia añadida en la estela, en particular. Esta turbulencia está fundamentalmente generada en la capa de cortadura de la estela cercana. Esto se muestra en la Figura 1.1, en la que puede verse una representación esquemática de la sección horizontal de la estela. Como se aprecia en el dibujo, hay una región central donde el flujo es decelerado por la aeroturbina, y fuera de ésta la velocidad presenta el valor ambiente. A causa de la diferencia entre estas dos velocidades, se crea una capa de cortadura con forma de anillo. La difusión turbulenta hace que se incremente con la distancia aguas abajo el espesor de esta capa de cortadura, y a una cierta distancia (aproximadamente entre dos y cinco diámetros), la capa de cortadura alcanza el eje de la estela. Se debe tener en cuenta que esta capa de cortadura en la estela cercana está formada por una gran concentración de vórtices, y que el flujo no es realmente turbulento fuera de esto. La semejanza con las capas de cortadura turbulentas clásicas, como las estelas o capas de mezcla, ocurre en realidad porque las aeroturbinas son analizadas en un sentido de "promedio": el flujo en un punto es tratado en conjunto como la media a lo largo de muchas revoluciones del rótor, de manera que las variaciones azimutales en las velocidades medias que vería un observador que rotase ligado a la turbina aparecen como turbulencia para un observador estático.

Por otro lado, debido a que se aplican condiciones de contorno de periodicidad en los planos de entrada, $x = 0$, y salida $x = L_x$, el campo fluido que es representado corresponde en realidad no a única turbina, sino a una línea de infinitas aeroturbinas separadas una distancia L_x. La longitud L_x se ha tomado suficientemente grande como para que el campo fluido incidente sobre la aeroturbina corresponda muy aproximadamente con el flujo no perturbado que incidiría sobre una única turbina aislada.

CAPÍTULO 5

VALORES TURBULENTOS MEDIOS EN ESTELA

5.1 CONSIDERACIONES GENERALES

El objeto del presente capítulo es mostrar los resultados numéricos relacionados con los valores turbulentos medios en la estela, obtenidos en las simulaciones de grandes escalas llevadas a cabo.

En primer lugar, discutiremos los resultados obtenidos en las simulaciones de tipo canal, es decir en ausencia del disco poroso que representa la turbina. El propósito de esto es de comparar las características del flujo básico o imperturbado logrado numéricamente con el flujo real atmosférico que interacciona con las turbinas en los parques eólicos en funcionamiento. A continuación se analizan los resultados referentes a los valores medios de algunas propiedades turbulentas en la estela, en particular la velocidad y las componentes del tensor de esfuerzos turbulentos de Reynolds. Estos resultados son comparados con medidas experimentales obtenidos por Cleijne [1992] en el parque eólico de Sexbierum Wind Farm (Países Bajos). Finalmente se realizan comparaciones con otros datos experimentales y con correlaciones analíticas previamente propuestas por diferentes autores en la literatura existente sobre el tema.

Los cálculos numéricos han sido llevados a cabo finalmente con una malla compuesta por $256 \times 96 \times 96$ puntos en las direcciones según x, y y z respectivamente, lo que, considerando las dimensiones del dominio de cálculo descrito en el capítulo anterior, asegura que la forma de las celdas tenga un

buena calidad, es decir, sin un contraste elevado entre unas dimensiones y otras. El total de celdas es, por consiguiente, de 2,36 millones. En la dirección vertical (eje y) los puntos de la malla está distribuidos no uniformemente. En particular, estos han sido agrupados en la zona en torno a la turbina. El primer punto está situado a una distancia de $0{,}018h$ sobre el suelo, lo que corresponde a una distancia de aproximadamente 12,5 veces la rugosidad. La justificación de la elección de esta malla esta basada en:

- El problema es resoluble con un ordenador personal, o a lo sumo con una estación de trabajo convencional, que son los equipos de los que se dispone.
- En todos los casos, las celdas resultan ser lo suficientemente pequeñas como para que los esfuerzos de submalla encontrados sean siempre despreciables frente a los resueltos:

  $$\left|\left\langle \tau_{ij}^{(SGS)} \right\rangle\right| < 0,01\left|\tau_{ij}^{(Re)}\right|; \quad \tau_{ij}^{(SGS)} = 2\nu_T S_{ij},\ \tau_{ij}^{(Re)} = -\rho\left\langle v_i' v_j' \right\rangle.$$

- No existe un beneficio marginal al incrementar el número de celdas de la malla, puesto que los resultados de turbulencia promediados en el tiempo no cambian significativamente al aumentar el número de puntos. Al menos esto es así con el tipo de malla cartesiana utilizado. La exactitud de los resultados podría quizá incrementarse ensayando otros tipos de mallas.

5.2 RESULTADOS Y COMPARACIÓN CON DATOS EXPERIMENTALES

Cleijne [1992] recopila una serie de datos sobre turbulencia obtenidos a partir de mediciones llevadas a cabo en el parque eólico Sexbierum Wind Farm. Esta instalación se encuentra en el norte de lo Países Bajos y cuenta con 18 turbinas HOLEC WPS−30, de 300 kW de potencia nominal, un diámetro del rótor de $D = 30$ m y una altura del buje de $h = 35$ m. Aquí sólo son considerados los datos de medidas concernientes a una única turbina aislada. La posición relativa de la turbina y los mástiles de medida puede apreciarse en la Figura 5.1. La velocidad del viento incidente es recogida en el mástil M4, mientras que las tres componentes de la velocidad a la altura del buje son registradas en los mástiles “a” y “c” (anemómetros a2 y c2). En el

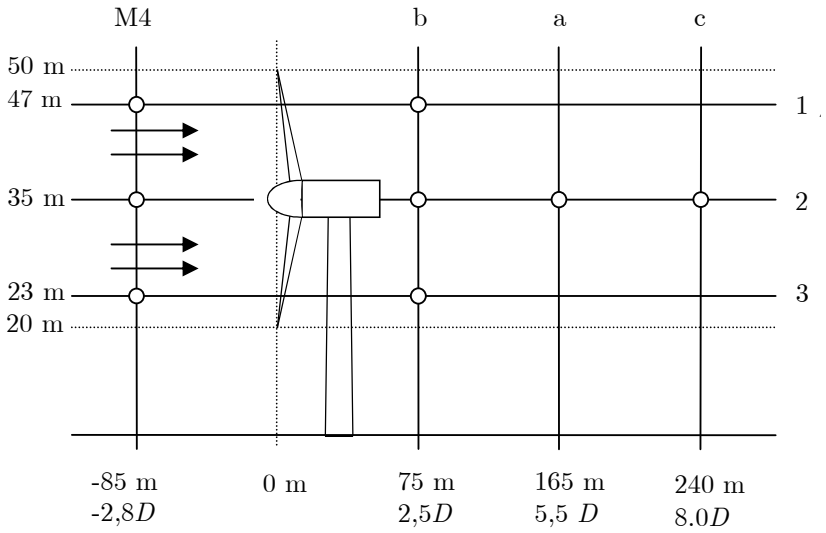

Figura 5.1. *Posición relativa de la turbina, los mástiles y los anemómetros.*

mástil "b" se miden velocidades a las tres alturas indicadas, que aproximadamente corresponden a las partes superior, media e inferior del rótor respectivamente (anemómetros b1, b2 y b3). Para velocidades en el rango de 7−10 m/s, el coeficiente de empuje de la turbina es $C_T = 0{,}75$. Los cálculos presentados corresponden a una velocidad del viento incidente de $V_0 = 10$ m/s a la altura del buje y a una rugosidad del terreno de $y_0 = 0{,}05$ m. La ley logarítmica de velocidad proporciona, para este caso una velocidad de fricción de $u_* = 0{,}61$ m/s. Para facilitar la comparación de los resultados, éstos se presentan en forma adimensional, sin que ello signifique que sean válidos para cualquier velocidad del viento, principalmente porque el coeficiente de empuje varía.

5.2.1 COMPARACIÓN DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL FLUJO INCIDENTE SOBRE LA TURBINA CON LAS DEL VIENTO ATMOSFÉRICO

Las simulaciones de flujo en canal, es decir, en ausencia de la turbina eólica, muestran las características turbulentas del "viento numérico". Este mismo viento numérico es el que actuará como flujo incidente sobre la máquina cuando se introduzca el disco poroso para simular la estela creada por

la misma. Los valores obtenidos en los cálculos deben ser comparados con los de la turbulencia atmosférica con el objeto de asegurar que las simulaciones reproducen suficientemente bien las condiciones de funcionamiento ambientales de las turbinas reales.

En la Figura 5.2 se da una representación gráfica del perfil de velocidad en función de la distancia al suelo, y es comparado con la ley logarítmica de la velocidad expresada en la ecuación (4.8). El acuerdo es bueno en la zona en torno a la posición dónde se situará la turbina. En la parte superior del dominio de cálculo la velocidad es mayor que la dada por la ley de la pared. Esto es debido a la imposición de las condiciones de contorno (4.21) a (4.23) en el borde superior del recinto computacional.

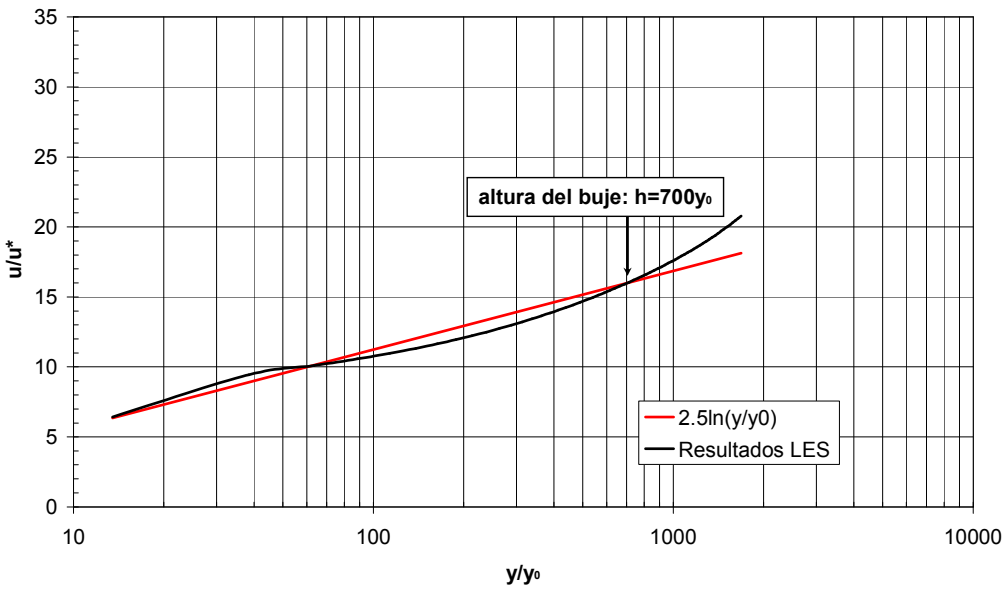

Figura 5.2. Flujo imperturbado sobre la turbina. Perfil de velocidad y ley logarítmica de la pared.

Las componentes del tensor de esfuerzos de Reynolds $\tau_{ij}^{(Re)} = -\rho \left\langle v_i' v_j' \right\rangle$ pueden verse representadas en la Figura 5.3. Los esfuerzos de subescala son $\tau_{ij}^{(SGS)}$ completamente despreciables comparados con los resueltos (esfuerzos de Reynolds) excepto en el caso de la componente $\tau_{xy}^{(Re)}$en una región muy pequeña próxima a las paredes, ya que en ellas $v_y = 0$ en todo instante, y por tanto

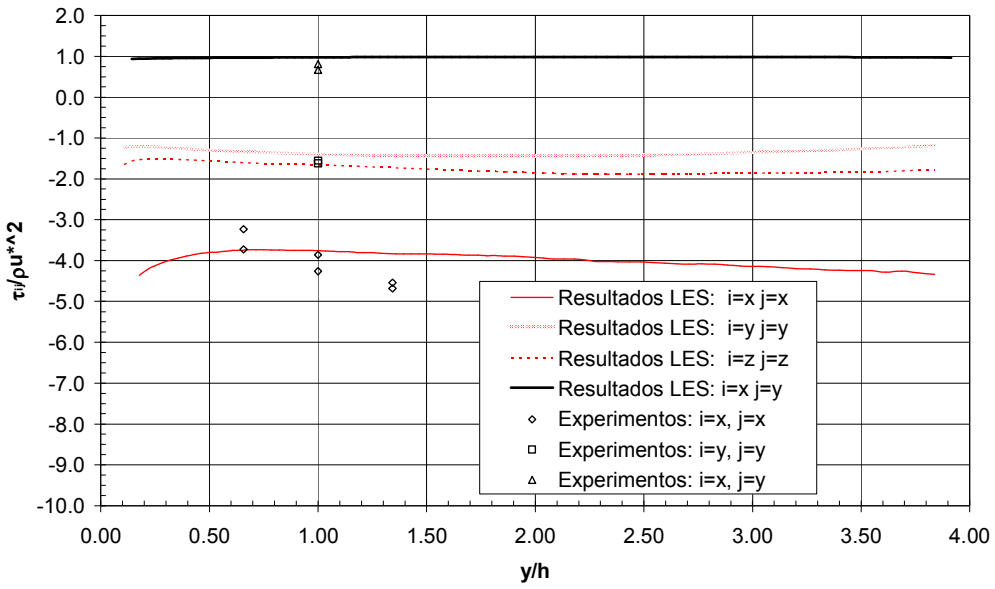

Figura 5.3. Comparación de los perfiles de las componentes del tensor de esfuerzos de Reynolds con los medidos en Sexbierum Wind Farm.

$v'_y = 0$ también. Las componentes $\tau_{xz}^{(Re)}$ y $\tau_{yz}^{(Re)}$ son nulas por causa de la simetría. Como indica la ecuación (4.4) el esfuerzo turbulento de cortadura de la corriente debe ser $\tau_{xy} = \rho u_*^2$ lo que está en excelente acuerdo con el valor calculado. Las tres componentes diagonales del tensor de Reynolds son algo menores que los valores estimados por Panofsky y Dutton [1984], dados en (4.1) a (4.3). Sin embargo, los valores obtenidos numéricamente están bastante próximos a los medidos en el parque eólico Sexbierum Wind Farm, como se observa en la gráfica.

A la vista de las figuras 5.2 y 5.3 puede concluirse que las propiedades turbulentas del flujo simulado que incide sobre la turbina son similares en un nivel bastante satisfactorio a las de la capa límite atmosférica, en cuanto a los siguientes aspectos:

- Perfil de velocidad: se ajusta bastante de forma aproximada a la ley logarítmica de la pared, especialmente en la zona donde se sitúa la turbina.
- Esfuerzo cortante turbulento constante en todo el dominio de cálculo.

- Energía cinética turbulenta contenida en las escalas resueltas muy parecida a la que se encuentra experimentalmente en el viento atmosférico.
- Propiedades de anisotropía próximas a los valores experimentales; es decir, la distribución de la energía cinética turbulenta entre las tres componentes diagonales del tensor de Reynolds se ajusta a lo observado en las mediciones.

Por último, a continuación se presenta la distribución de viscosidad turbulenta adimensionalizada, obtenida a través del método de submalla de Smagorinsky con cálculo dinámico. No debe entenderse, por tanto, como viscosidad turbulenta en el sentido de la media de Reynolds, que sería el valor $\kappa u_* y$, y que lleva, como es sabido, a la obtención del perfil logarítmico de velocidad analíticamente. Puede observarse el perfil de viscosidad turbulenta en la Figura 5.4, en la que se aprecia un pico de viscosidad turbulenta en algún punto próximo a la pared.

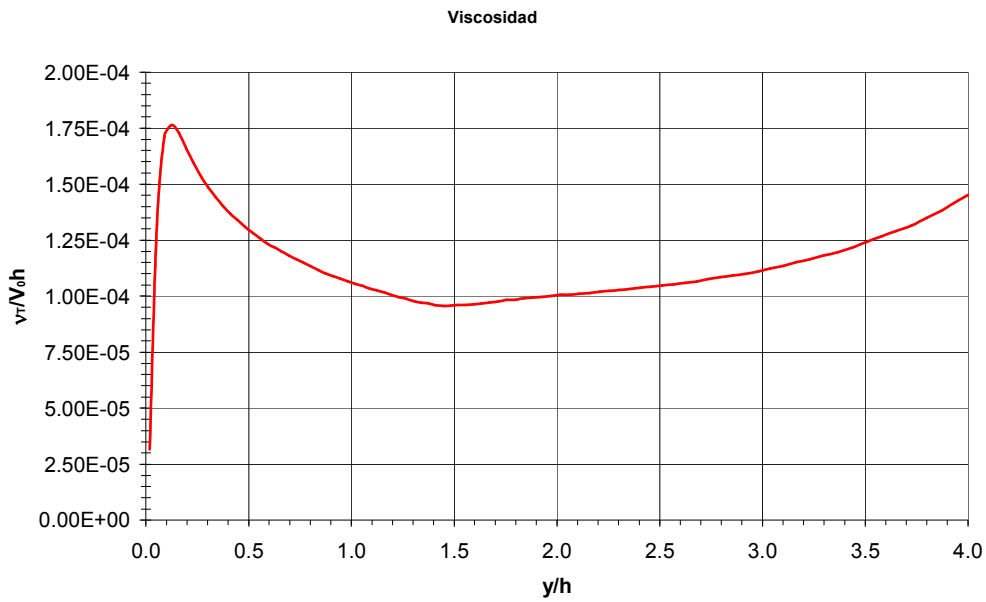

Figura 5.4. *Perfil de viscosidad cinemática turbulenta adimensionalizada del flujo incidente.*

5.2.2 VISIÓN GENERAL DEL COMPORTAMIENTO DE LA ESTELA

A continuación se presentan de forma gráfica una serie de resultados obtenidos en las simulaciones de grandes escalas de la estela. La primera representación, Figura 5.5, muestra una evolución en el tiempo de los

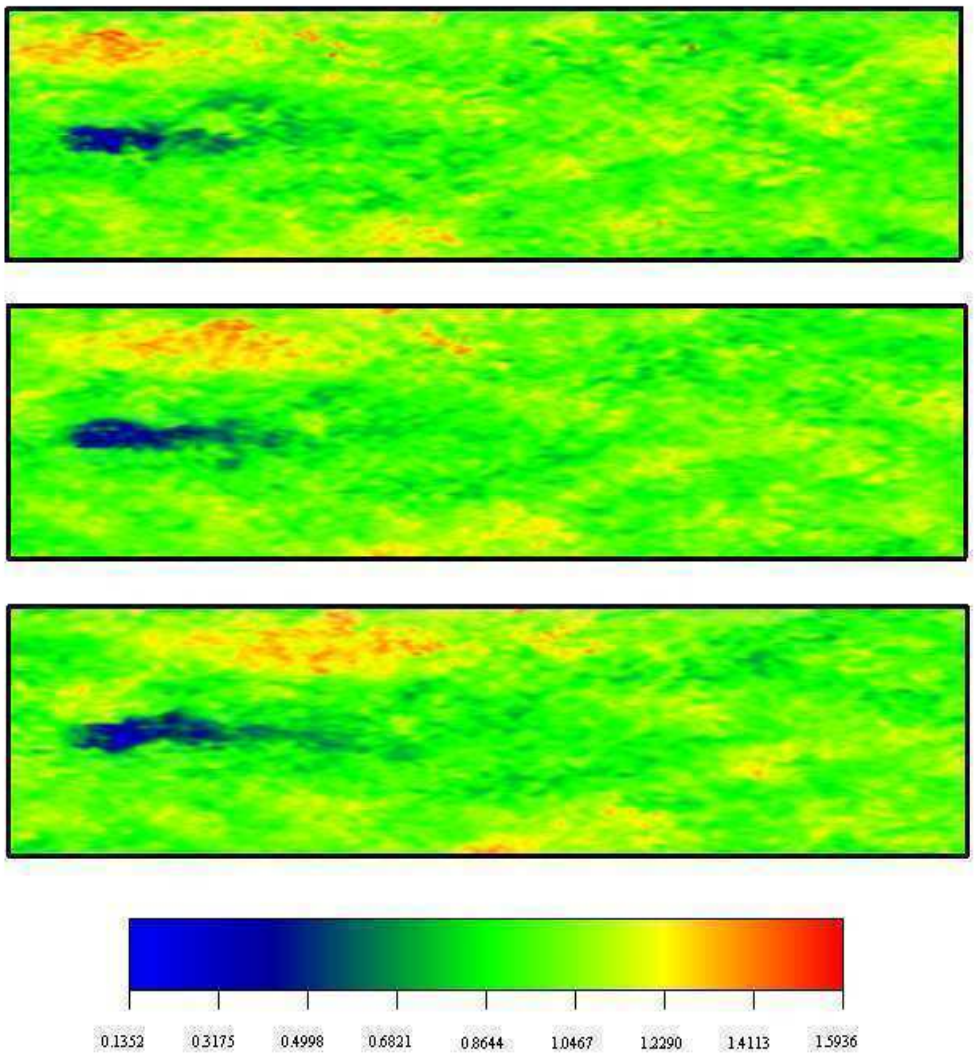

Figura 5.5. Secuencia de tres contornos de magnitud de velocidad instantánea adimensionalizada $|\mathbf{v}|/V_0$ en tres diferentes instantes separados un cierto intervalo temporal. Corte en un plano horizontal a la altura del buje.

contornos del módulo de la velocidad instantánea en un plano horizontal a la altura del buje de la turbina. Estos contornos se comparan con el valor medio de la velocidad en la dirección de avance de la corriente que se muestran en la Figura 5.6:

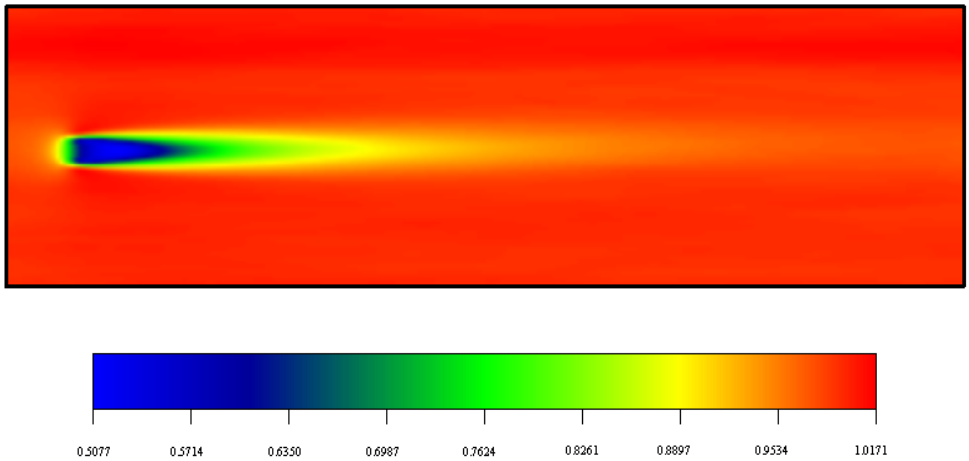

Figura 5.6. *Contornos de velocidad media* $<v_x>/V_0$. *Corte en un plano horizontal a la altura del buje.*

Además, con el objeto de proporcionar una imagen más completa del campo de velocidades del fluido, la Figura 5.7 muestra los contornos de magnitud de velocidad instantánea en un plano vertical que contiene el eje de la turbina. En ella se aprecia un defecto de velocidad en la zona aguas abajo de la turbina, que puede verse ampliada junto con una representación de los vectores de velocidad, que indican la dirección del fluido en cada punto de dicho plano. La gráfica también permite apreciar la cortadura del flujo, que presenta un perfil de velocidad media creciente con la altura.

A continuación, se introducen algunos contornos de otras magnitudes de interés, como la viscosidad turbulenta, la energía cinética turbulenta o la presión. En este último caso, se puede comprobar la relación existente entre la fuerza ejercida por el fluido sobre la turbina como consecuencia de la diferencia de presión existente aguas arriba y aguas abajo del rótor y la extracción de cantidad de movimiento introducida en el disco actuador:

$$C_T = 0,75 = F \,/\, \tfrac{1}{2}\,\rho V_0^2 A \approx (p_{\max} - p_{\min}) \,/\, \tfrac{1}{2}\,\rho V_0^2 \approx 0,8$$

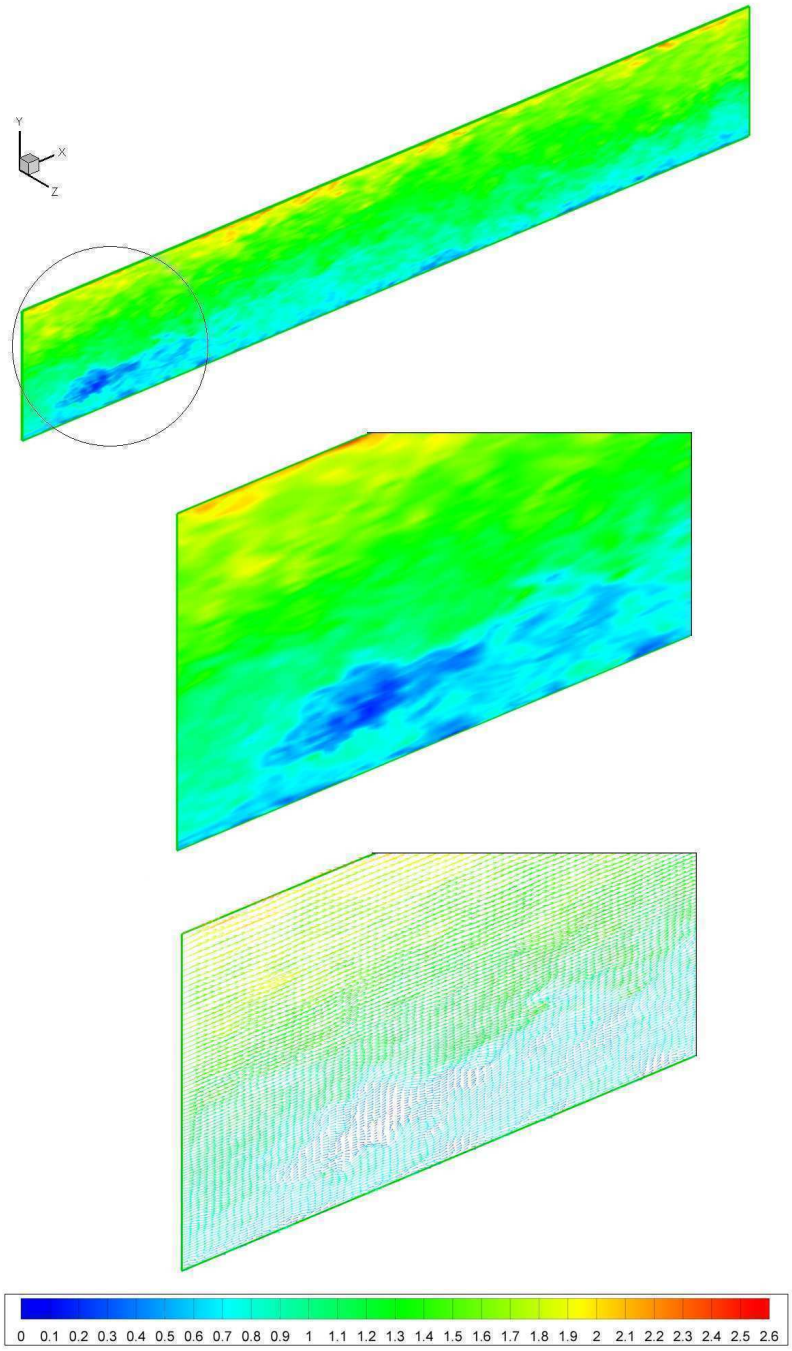

Figura 5.7. *Contornos de magnitud de velocidad* $|\mathbf{v}|/V_0$ *y vectores de velocidad* $\mathbf{v}/V_0$ *en la estela. Corte por un plano vertical que contiene el eje de la turbina.*

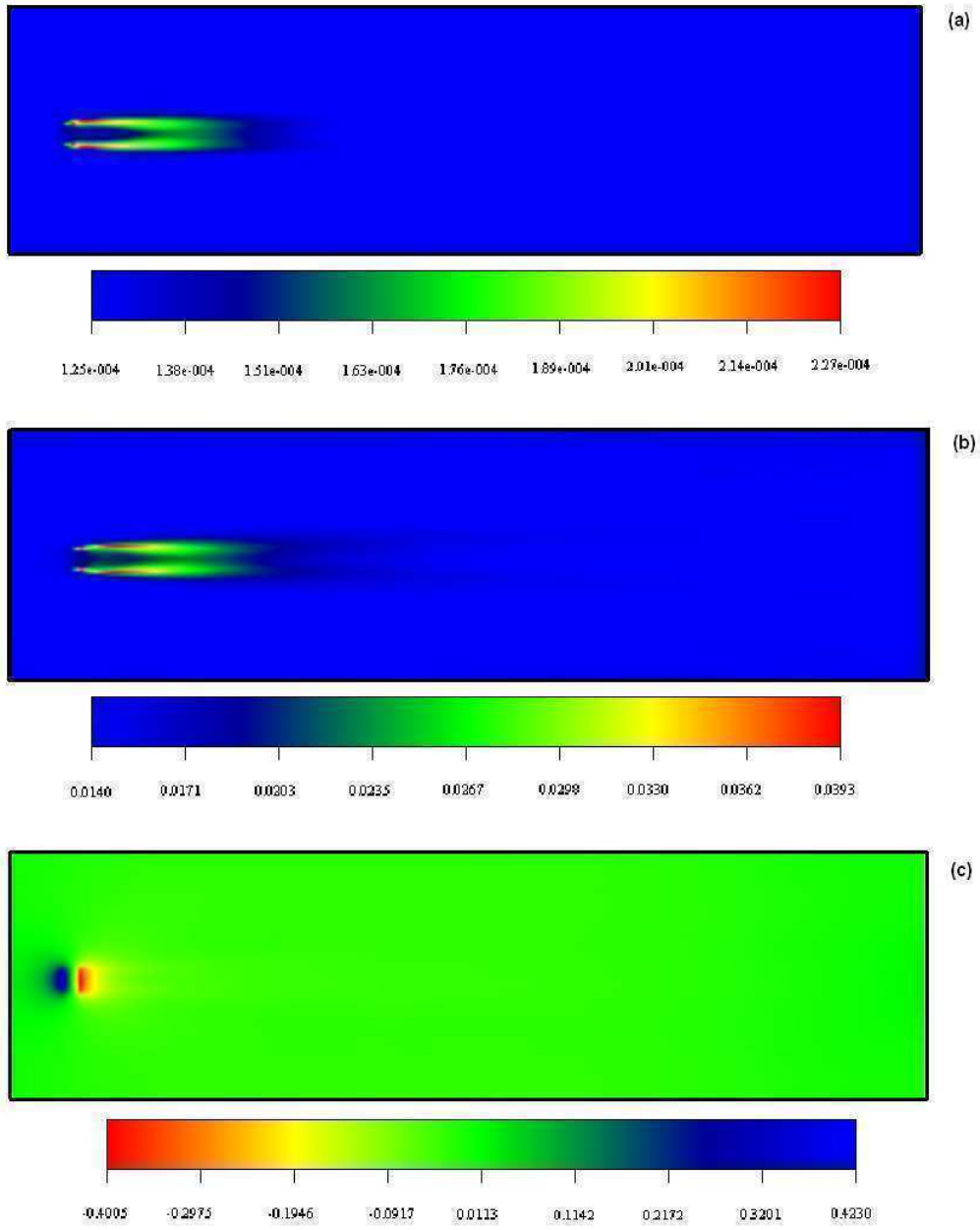

Figura 5.8. *Contornos de magnitudes fluidas adimensionalizadas en un plano horizontal a la altura del buje.* (a) *Viscosidad turbulenta* ν_T/hV_0. (b) *Energía cinética turbulenta* k/V_0^2. (c) *Presión* $P/0{,}5\rho V_0^2$.

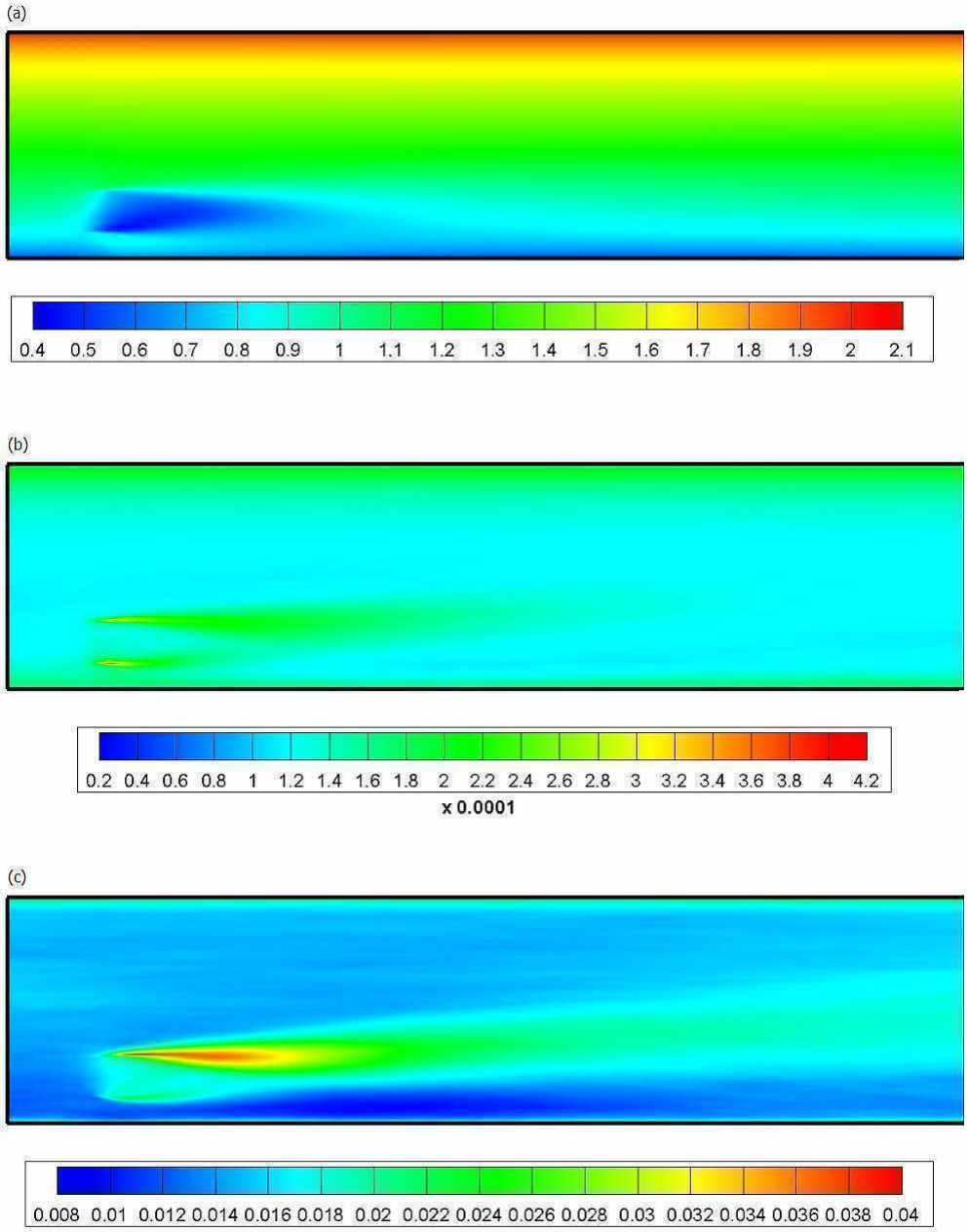

Figura 5.9. *Contornos de magnitudes fluidas adimensionalizadas en un plano vertical que contiene el eje del rótor de la turbina.* (a) *Velocidad media* $<v_x>/V_0$. (b) *Viscosidad turbulenta* ν_T/hV_0. (c) *Energía cinética turbulenta* k/V_0^2.

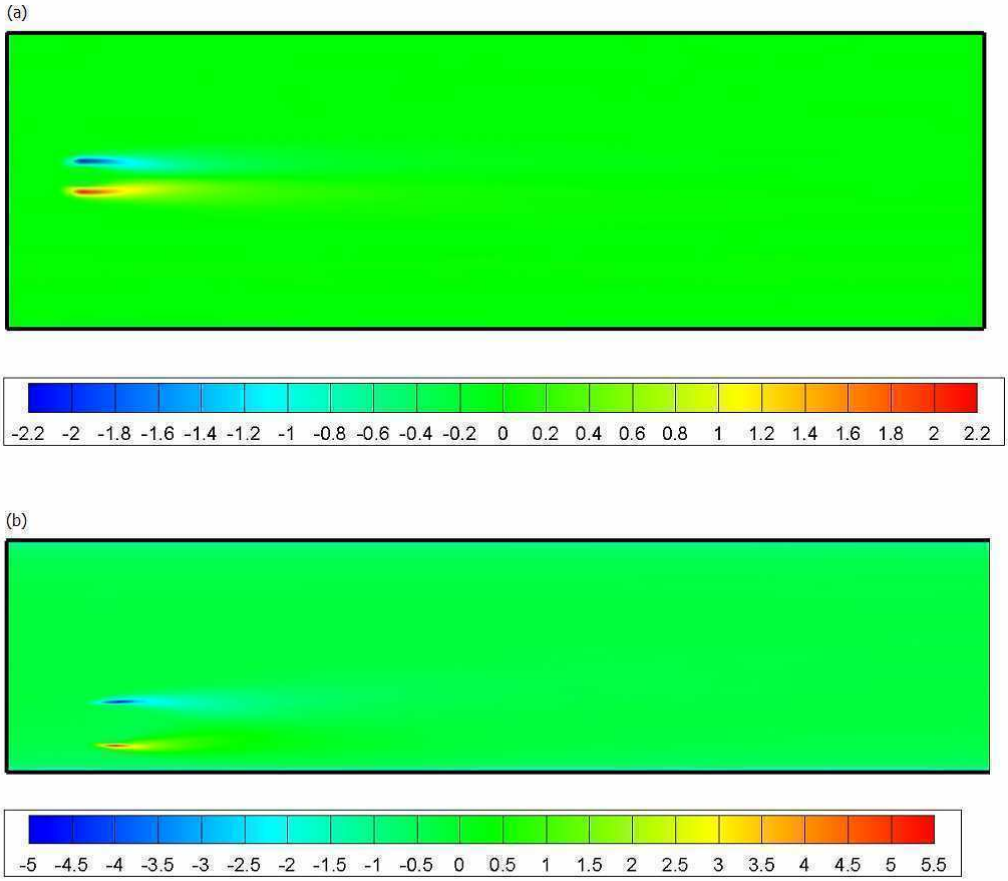

Figura 5.10. *Contornos de vorticidad adimensionalizada. (a) Representación de la componente* $\omega_y h/V_0$ *en un plano horizontal que contiene el eje de la turbina. (b) Representación de la componente* $\omega_z h/V_0$ *en un plano vertical que contiene el eje de la turbina.*

En la Figura 5.8 puede verse la distribución de valores de las magnitudes fluidas mencionadas anteriormente en un plano horizontal a la altura del buje. En cambio, la Figura 5.9 muestra contornos en un plano vertical que contiene el eje del rótor. Se añade también la Figura 5.10, en la que se aprecia una representación de los contornos de vorticidad, tanto en un plano horizontal como en uno vertical, que contienen ambos el eje de la turbina.

5.2.3 COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS DE ESTELA

En las Figuras 5.11 a 5.16 se representan resultados obtenidos en los cálculos LES frente al comportamiento de los datos experimentales disponibles. Estos datos hacen referencia a la velocidad del viento y a las componentes del tensor de esfuerzos de Reynolds. El ángulo representado en la coordenada del eje horizontal corresponde al ángulo formado por el vector velocidad media del viento y la dirección del segmento que une el sensor y el centro del rótor de la turbina (por ejemplo, el ángulo 0º corresponde a un viento cuya dirección está alineada con la dirección que une la turbina con el anemómetro).

En la Figura 5.11 puede apreciarse una comparación entre los resultados y las mediciones concernientes a los defectos de velocidades creados en la estela a varias distancias aguas abajo del rótor. Existe un claro comportamiento asimétrico de los resultados experimentales que obviamente no puede ser reproducido con el modelo utilizado, y que probablemente sea debido al efecto de otras turbinas o algunos obstáculos situados aguas arriba. Hay un buen acuerdo para los valores positivos de la dirección del viento, donde probablemente no existe una perturbación significativa sobre el flujo básico previa a la de la propia estela.

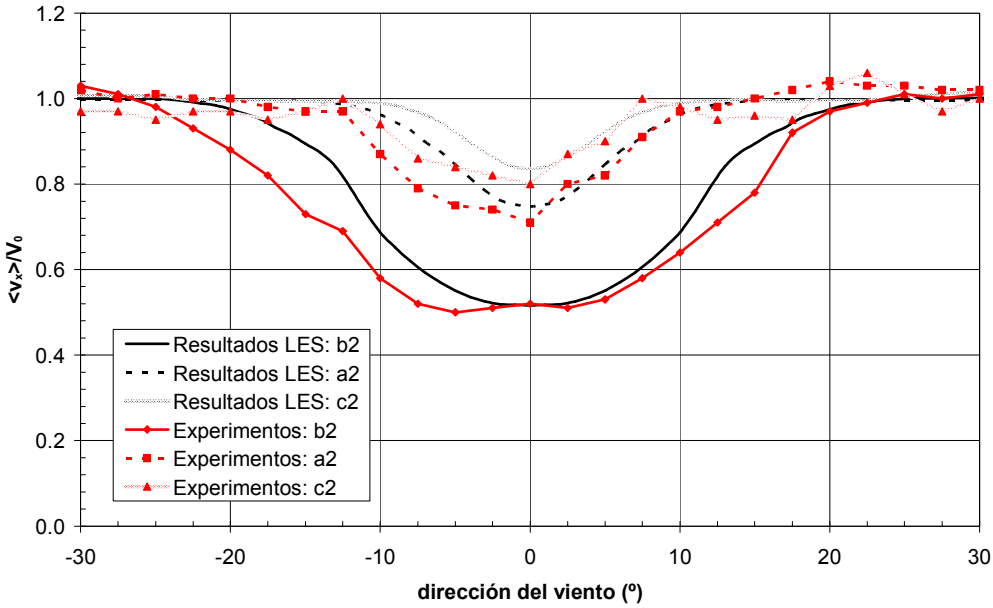

Figura 5.11. *Razón de la velocidad del viento* $<v_x>/V_0$ *en un plano horizontal a la altura del buje, a distancias de la turbina de* $2{,}5D$, $5{,}5D$ *y* $8D$.

La Figura 5.12 muestra los valores de las intensidades de turbulencia adimensionalizadas en la dirección longitudinal, $I_x = \left\langle v_x'^2 \right\rangle^{1/2} / V_0$, y en la dirección vertical, $I_y = \left\langle v_y'^2 \right\rangle^{1/2} / V_0$, en la estela cercana a la altura del buje para las diferentes direcciones de viento. La componente que no está representada, $I_z = \left\langle v_z'^2 \right\rangle^{1/2} / V_0$, presenta valores intermedios entre las otras dos. El código reproduce satisfactoriamente el valor medido de la intensidad de turbulencia longitudinal en los picos que se observan en torno a los 10º–20º. Estos picos corresponden a la capa de cortadura que se forma en la estela cercana. No se aprecian picos similares para la intensidad de turbulencia vertical, cuyos valores calculados concuerdan bien con los resultados experimentales. Los experimentos muestran que, en el centro de la estela, I_x e I_y adquieren parecidos valores, sin embargo, los cálculos no reproducen con total exactitud este comportamiento y los valores calculados de la intensidad de turbulencia longitudinal son algo superiores a los medidos. Las causas de esta discrepancia deben ser analizadas.

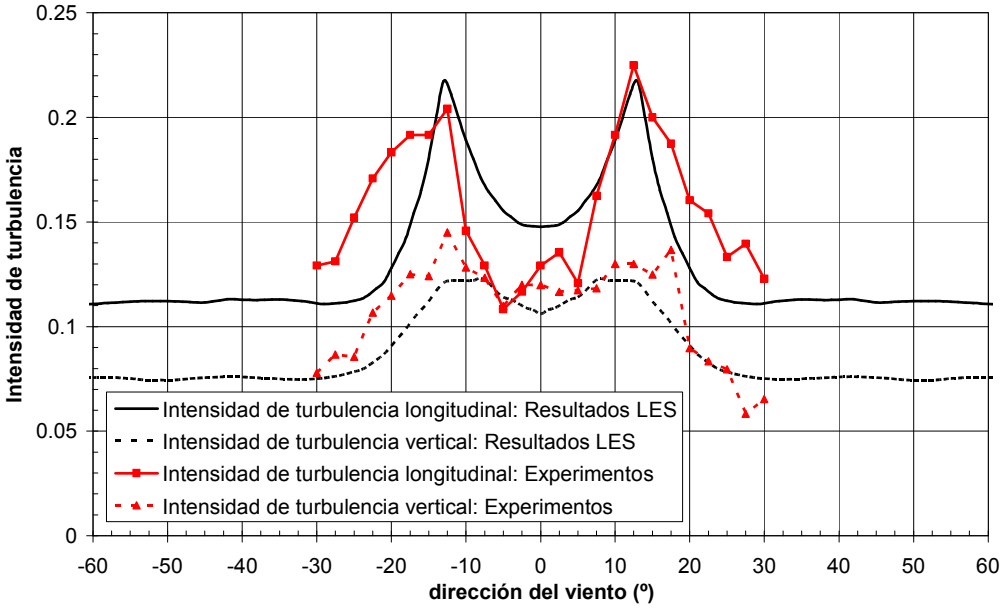

Figura 5.12. *Intensidad de turbulencia longitudinal* $<v_x'^2>^{1/2}/V_0$ *y vertical* $<v_y'^2>^{1/2}/V_0$, *en un plano horizontal a la altura del buje a distancia de la turbina de* 2,5*D*.

Asimismo pueden verse en la Figura 5.13 los perfiles de intensidad de turbulencia longitudinal a tres diferentes alturas, que corresponden con las de

los anemómetros b1, b2 y b3. Los anemómetros b1 y b3 están respectivamente cerca de la parte superior ($z = h + 0{,}4D$) y parte inferior ($z = h - 0{,}4D$) del disco barrido por el rótor, por lo que se encuentran en el interior de la región anular de alta cortadura (véase Figura 1.1). De nuevo, como sucede en la Figura 5.12, las mayores discrepancias con los experimentos ocurren en la zona central de la estela, dónde los experimentos muestran un fuerte descenso de la intensidad de turbulencia longitudinal. Sin embargo, no está clara la razón física que lleva a este comportamiento, ya que los anemómetros b1 y b3 están prácticamente inmersos en el interior de la capa de cortadura, fuera del núcleo, y se supone que deben presentar siempre un alto nivel de turbulencia, como muestran los cálculos.

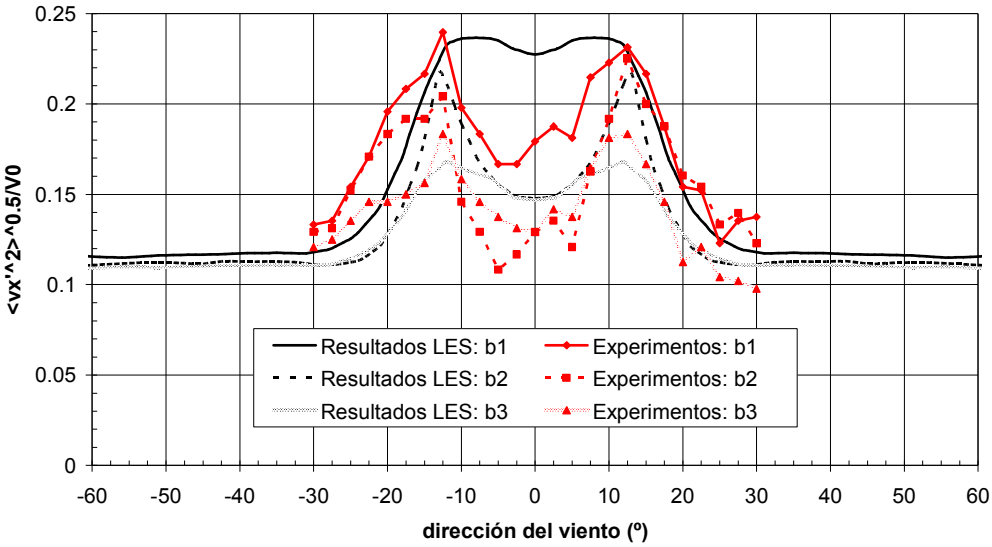

Figura 5.13. *Intensidad de turbulencia longitudinal* $<v_x{}'^2>^{1/2}/V_0$, *a diferentes alturas próximas a la parte superior, buje y parte inferior del rotor de la turbina.*

La Figura 5.14 permite ver los resultados acerca de la evolución de la intensidad de turbulencia longitudinal con la distancia aguas abajo. Podemos observar nuevamente los valores asimétricos de las medidas de intensidad de turbulencias y una vez más, la concordancia es mejor en la zona de la derecha; obviamente, no es posible simular estas irregularidades con los cálculos. La turbulencia creada en la estela es aún importante a distancias de ocho diámetros aguas abajo. Los resultados experimentales a esa distancia tienen un

comportamiento irregular y desordenado, por lo que su fiabilidad podría ser puesta en entredicho.

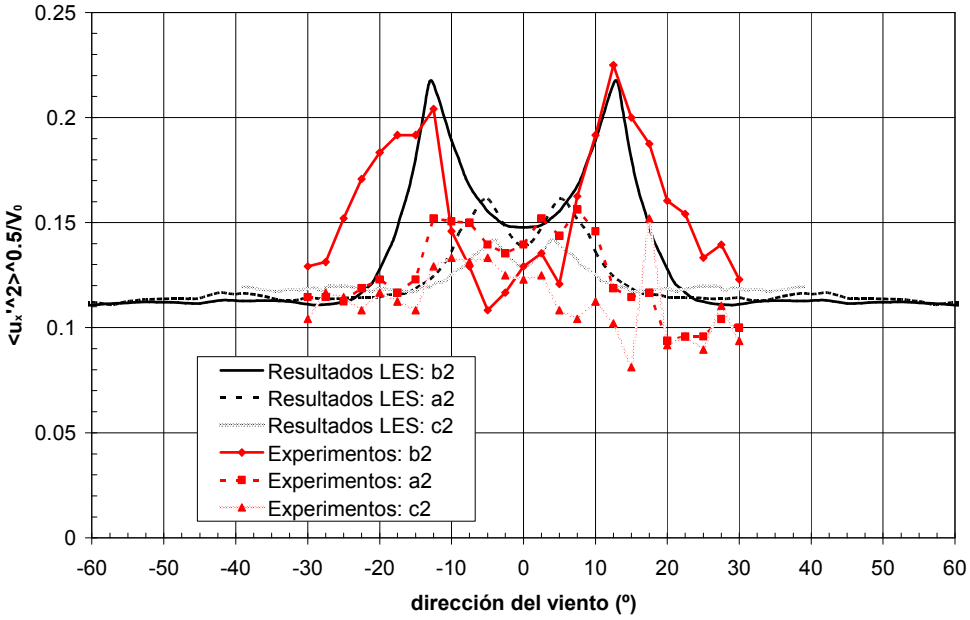

Figura 5.14. *Intensidad de turbulencia longitudinal* $<v_x'^2>^{1/2}/V_0$, *en un plano horizontal a la altura del buje, a distancias de la turbina de* 2,5D, 5,5D *y* 8D.

En la Figura 5.15 se muestra la distribución en un corte horizontal a la altura del buje de la correlación adimensional $\left\langle v_x' v_z' \right\rangle / V_0^2$. Existe un buen acuerdo con los datos experimentales. Como cabría esperar, a causa de la simetría esta correlación se anula en el eje de la estela y en las zonas del campo fluido suficientemente alejadas. Hay un máximo en la capa de cortadura, lo cual está también de acuerdo con los modelos conocidos como de "viscosidad turbulenta de tipo gradiente". El valor del máximo es considerable, aproximadamente cuatro veces el valor del esfuerzo de cortadura u_*^2/V_0^2 en el flujo ambiente no perturbado. La posición del máximo está bien predicha por nuestro código, mientras que el valor calculado del pico es algo más pequeño que el medido. La correlación $\left\langle v_y' v_z' \right\rangle / V_0^2$, que corresponde con el esfuerzo turbulento en un plano vertical perpendicular a la dirección media del viento no es presentada ya que no aparece reflejada en el informe de Cleijne [1992];

esta correlación tiene un comportamiento similar al de la Figura 5.15, pero con un pico más pequeño.

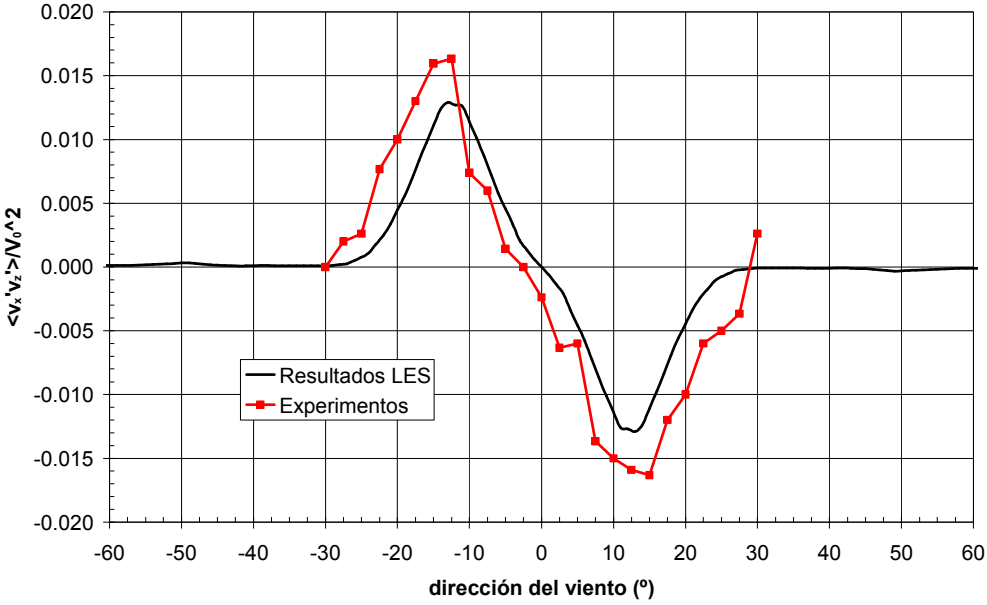

Figura 5.15. Correlación adimensional $<v_x'v_z'>/V_0^2$*, en un plano horizontal a la altura del buje a distancia de la turbina de* 2,5*D.*

Los resultados de la correlación asociada con el esfuerzo cortante, $\left\langle v_x' v_y' \right\rangle / V_0^2$, se muestran en la Figura 5.16. Destacan los dos picos localizados en la capa de cortadura. Por otro lado, en el centro de la estela cercana hay un mínimo del esfuerzo de cortadura. Esto era previsible, ya que la velocidad media es más uniforme dentro del núcleo de la estela, y por tanto los gradientes de velocidad media, responsables en última instancia de la presencia de los esfuerzos turbulentos, son menos importantes. A la vista de la comparación con los experimentos, la forma cualitativa del perfil está bien estimada, aunque la comparación no es fácil debido a asimetrías e irregularidades de los datos experimentales. De nuevo, parece que el acuerdo es aceptable para los datos de la parte derecha. Cabe señalar que los presentes cálculos muestran un decaimiento con la distancia aguas abajo más rápido para esta correlación que para las componentes diagonales del tensor de esfuerzos turbulentos.

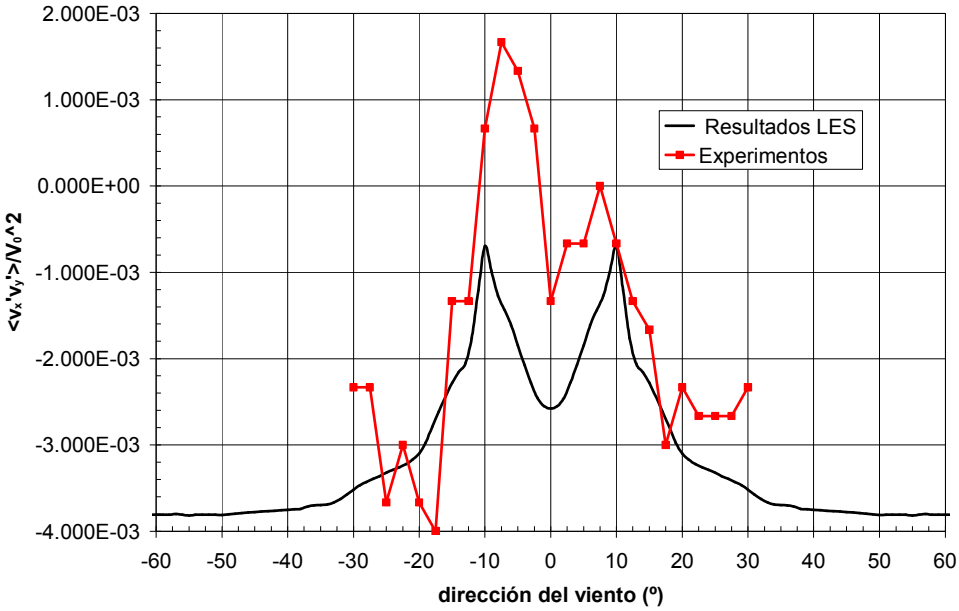

Figura 5.16. *Correlación adimensional* $<v_x'v_y'>/V_0^2$, *en un plano horizontal a la altura del buje a distancia de la turbina de* 2,5D.

Por último, las figuras 5.17 y 5.18 presenta la variación con la altura de la velocidad media y de la intensidad de turbulencia longitudinal obtenidas con los cálculos. No hay datos experimentales disponibles para realizar comparación, excepto los dados en la Figura 5.13. En la Figura 5.17 se aprecia cómo el defecto de velocidad presenta un comportamiento asimétrico respecto al eje de la turbina, debido al perfil de velocidades logarítmico que incide sobre ella. En la zona de estela cercana (distancia 2.5D) se observa una leve aceleración de la corriente en la zona comprendida entre el rótor de la turbina y el suelo. Esta aceleración es debida a la conservación de masa, que implica que el caudal que atraviesa el rótor debe ser el mismo antes y después de cruzar éste, por lo que el defecto de velocidad en el núcleo de la estela debe compensarse con un ligero incremento de velocidad en el exterior de la misma. Por otro lado, según puede verse en la Figura 5.18 los dos picos de intensidad de turbulencia correspondientes a la región de alta cortadura toman diferentes valores. La turbulencia es mucho mayor en el pico superior. Este fenómeno ha sido observado previamente por varios autores, Højstrup [1990], Smith y Taylor [1991] y Crespo y Hernández [1996]. El pico inferior ya no se distingue a distancias mayores de unos cuatro diámetros. Sin embargo, los resultados

numéricos muestran que aunque el perfil de intensidad de turbulencia se va aplanando progresivamente, sigue percibiéndose un máximo por encima del valor de intensidad de turbulencia ambiente hasta distancias de al menos 12–14 diámetros.

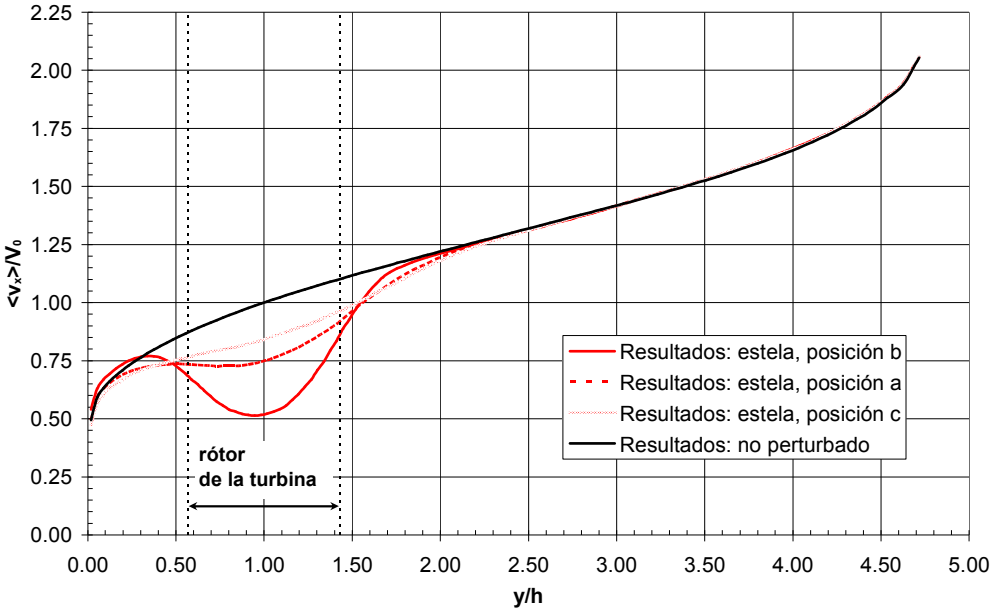

Figura 5.17. *Variación de la velocidad en la estela* $<v_x>/V_0$ *con la distancia al suelo.*

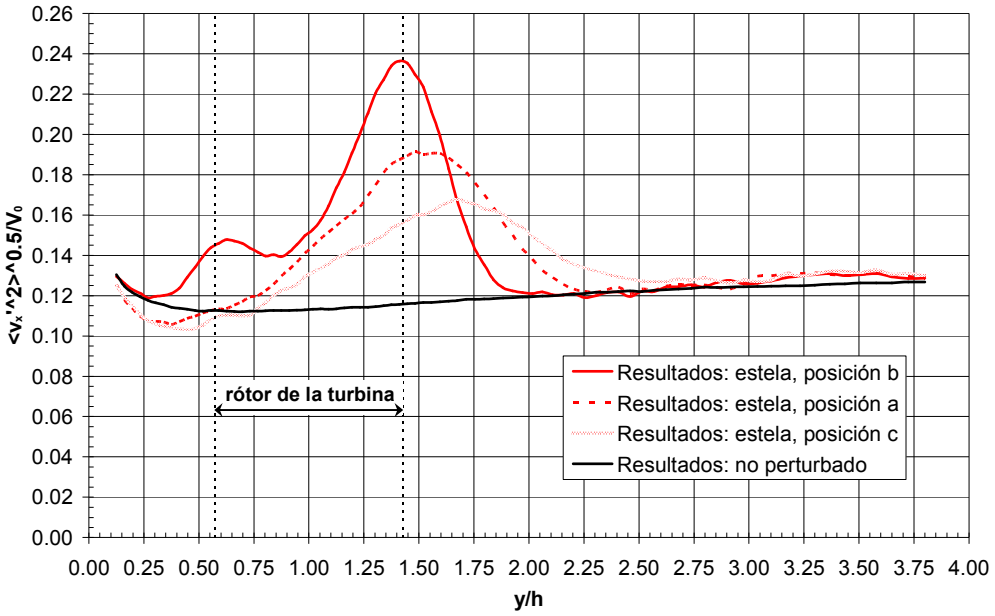

Figura 5.18. *Variación de la intensidad de turbulencia longitudinal* $<v_x'^2>^{1/2}/V_0$ *con la distancia al suelo.*

5.3 COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS CON CORRELACIONES ANALÍTICAS

Además de las comparaciones con datos experimentales, consideramos de interés revisar algunas correlaciones previamente propuestas por algunos autores respecto a la evolución de la intensidad de turbulencia en la estela, tanto para la región cercana como para la lejana.

5.3.1 ESTELA CERCANA

Gómez-Elvira *et al.* [2005] obtienen una solución analítica a partir del modelo algebraico explícito para las componentes del tensor de esfuerzos de Reynolds, cuando se aplica éste a la capa cortadura de la estela cercana, dónde la producción de energía cinética turbulenta domina sobre la disipación. Estos autores proponen la siguiente expresión para el incremento máximo de los términos diagonales del tensor de esfuerzos:

$$\begin{aligned} \Delta\left\langle v_x'^2\right\rangle_{\max} &= 0,2\Delta v^2 \\ \Delta\left\langle v_y'^2\right\rangle_{\max} &= 0,025\Delta v^2 \\ \Delta\left\langle v_z'^2\right\rangle_{\max} &= 0,025\Delta v^2 \end{aligned} \tag{5.1}$$

dónde Δv es el valor del defecto de velocidad máximo en la estela. Este resultado es válido en la zona superior de la capa de cortadura, dónde la intensidad de turbulencia añadida es mayor (ver Figura 5.18). Introduciendo el factor de velocidad inducida:

$$a = \frac{\Delta v}{2V_0} \tag{5.2}$$

la expresión resultante para el coeficiente de empuje, de acuerdo con la teoría del disco actuador es:

$$C_T = 4a\,(1-a) \;\; (\text{para } a < 0{,}5) \tag{5.3}$$

En consecuencia, el correspondiente valor de la intensidad de turbulencia añadida puede ser expresado mediante las siguientes correlaciones:

$$\Delta I_{x,\max} = \frac{\sqrt{\Delta\left\langle v_x'^2\right\rangle_m}}{V_0} = 0,894a = 0,447\left(1-\sqrt{1-C_T}\right) \tag{5.4}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta I_{y,\max} &= \frac{\sqrt{\Delta\left\langle v_y'^2\right\rangle_m}}{V_0} \\ \Delta I_{z,\max} &= \frac{\sqrt{\Delta\left\langle v_z'^2\right\rangle_m}}{V_0} \end{aligned}\right\} = 0,316a = 0,158\left(1-\sqrt{1-C_T}\right) \tag{5.5}$$

Crespo y Hernández [1996] siguieron un enfoque alternativo en el que considerando el mismo incremento total de energía cinética turbulenta dada en las ecuaciones (5.1), se asume que los tres términos contribuyen a la misma en la misma proporción que en el flujo de capa límite atmosférica, expresiones (4.1) a (4.3). La máxima intensidad de turbulencia longitudinal predicha es entonces menor que la dada en (5.4), obteniéndose:

$$\Delta I_{x,\max} = 0,362\left(1-\sqrt{1-C_T}\right) \tag{5.6}$$

Para las otras componentes se obtiene:

$$\Delta I_{y,\max} = 0,188\left(1-\sqrt{1-C_T}\right) \tag{5.7}$$

$$\Delta I_{z,\max} = 0,289\left(1-\sqrt{1-C_T}\right) \tag{5.8}$$

En la Figura 5.19 se proporciona una comparación de los resultados obtenidos con las correlaciones (5.4) y (5.6). Se han incluido también algunos datos experimentales tomados de Cleijne [1992], Smith y Taylor [1991], Talmon [1985], Taylor [1987], Hassan *et al.* [1988], Högström *et al.* [1988] y Højstrup [1990]. En todos lo casos, el máximo valor numérico de $\Delta I_{x,\max}$ fue obtenido dentro de una región entre uno y tres diámetros aguas abajo, y como se esperaba de acuerdo a las consideraciones previas, ocurrió en la parte superior de la estela. Nuestros resultados numéricos se encuentran el seno de la nube de puntos experimentales, y siguen la tendencia de las ecuaciones (5.4) y (5.6), acercándose más a la segunda según el coeficiente de empuje aumenta.

Se presenta también una comparación entre las máximas intensidades de turbulencia en las direcciones transversal y vertical predichas por las ecuaciones (5.5) junto con (5.7) y (5.8) y los resultados de nuestros cálculos, Figura 5.20. La correlación (5.8) se aleja considerablemente de los valores obtenidos, mientras

que el acuerdo con la correlación (5.5) es bastante bueno, siendo el ajuste mejor para la intensidad de turbulencia vertical que el obtenido para los el caso de de la intensidad de turbulencia transversal.

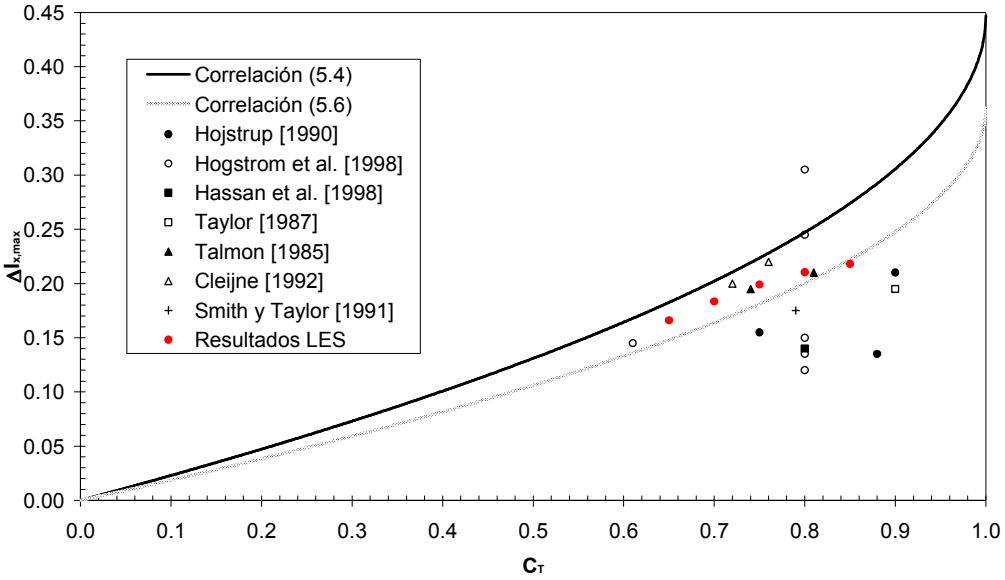

Figura 5.19. *Valor máximo de la intensidad de turbulencia longitudinal añadida.*

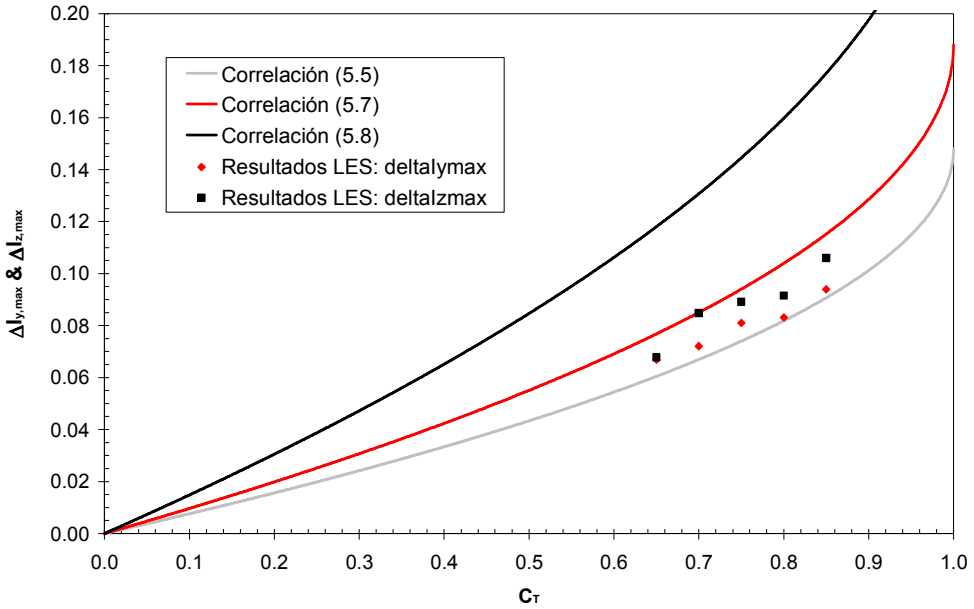

Figura 5.20. *Valor máximo de las intensidades de turbulencia transversal y vertical añadidas.*

5.3.2 ESTELA LEJANA

Un modelo para la turbulencia en estela lejana fue propuesto por Crespo y Hernández [1996] a raíz del análisis de una serie de datos obtenidos a partir de simulaciones. Su resultado es la siguiente expresión analítica:

$$\Delta I_x \propto \left(1-\sqrt{1-C_T}\right)^{0,83} I_0^{-0,03}\left(\frac{l}{D}\right)^{-0,32} \tag{5.9}$$

donde I_0 es la intensidad de turbulencia ambiente y l es la distancia a la turbina que crea la estela, de diámetro D. Otro modelo obtenido por ajuste con datos puramente experimentales es el debido a Quarton [1989]:

$$\Delta I_x \propto C_T^{\,0,7} I_0^{0,68}\left(\frac{l}{D}\right)^{-0,57} \tag{5.10}$$

Más recientemente Frandsen [2003] ha propuesto una expresión válida para todo el rango de extensión de la estela, puesto que proporciona un valor acotado para el incremento de turbulencia en la zona con $l \to 0$, es decir en la estela cercana. La correlación de Frandsen ha sido introducida en la reciente versión de la normativa internacional IEC 61400-1 Ed.3 [2005]:

$$\Delta I_x = \frac{1}{c_1 + c_2 \dfrac{l/D}{\sqrt{C_T}}} \tag{5.11}$$

Esta correlación predice un decaimiento de la intensidad de turbulencia añadida en la estela lejana proporcional a $C_T^{\,0,5}(l/D)^{-1}$. El valor que Frandsen da a las constantes es $c_1 = 1{,}5$ y $c_2 = 0{,}11$.

En la Figura 5.21, tomada de Frandsen [2003], se muestran los valores predichos para la intensidad de turbulencia añadida por las de tres correlaciones anteriores: Quarton, Crespo y Hernández y Frandsen. También pueden verse en ella algunos resultados experimentales presentados en Frandsen [2003] (proporcionados por Ghaie, en comunicación personal, 1997). Los resultados experimentales representados se supone que corresponden a velocidades a la altura del buje en el rango de 9–11 m/s, al que groseramente corresponde un coeficiente de empuje de $C_T = 0{,}7$. Se han introducido en la Figura 5.21 los valores máximos de la intensidad de turbulencia añadida a lo largo de la estela calculados mediante simulación de grandes escalas (para la que se ha tomado un valor del coeficiente de empuje $C_T = 0{,}7$). Estos

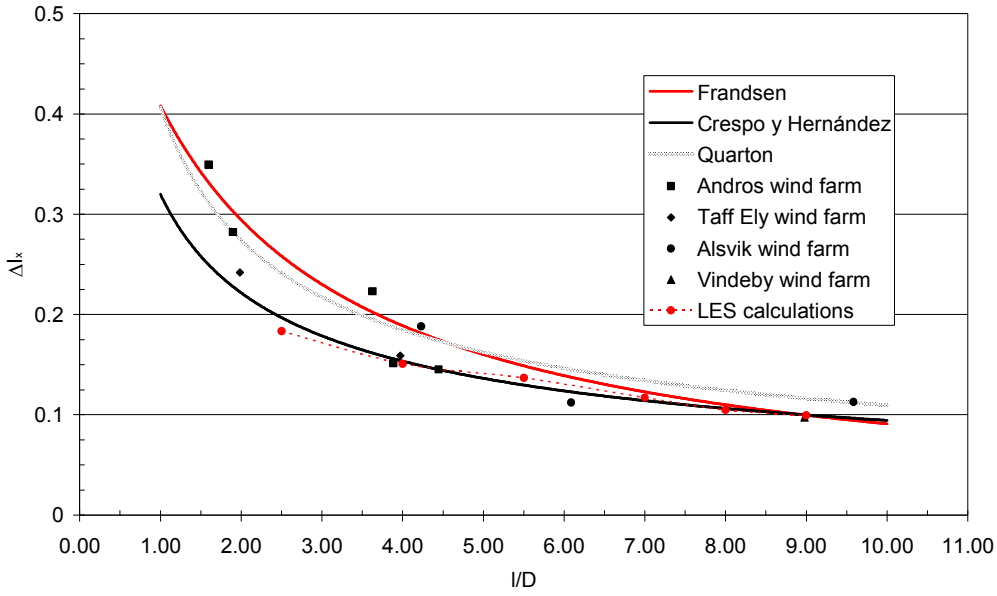

Figura 5.21. Correlaciones para la variación de la intensidad de turbulencia longitudinal añadida en la estela. Datos experimentales con velocidades en el rango 9 m/s< V_0<11 m/s. Para los cálculos LES se ha asumido C_T= 0,7.

resultados están de acuerdo con la correlación de Crespo y Hernández, y son ligeramente más pequeños que los proporcionados por la correlación de Frandsen. También se produce un buen acuerdo con algunos datos experimentales. Sin embargo, no está claro que todos los datos experimentales correspondan a C_T = 0,7; con valores mayores, en torno a C_T=1, la intensidad de turbulencia añadida en la estela cercana podría llegar hasta 0,447, ecuación (5.4), lo que explicaría el comportamiento de algunas medidas mostradas en la Figura 5.21.

CAPÍTULO 6

ANÁLISIS ESPECTRAL

6.1 DENSIDAD ESPECTRAL DE ENERGÍA Y ESPECTRO CRUZADO DE SERIES TEMPORALES

La intrincada estructura de la historia temporal de las componentes de la velocidad en un flujo turbulento requiere ciertas herramientas para su análisis. Mediante el análisis espectral es posible, en ocasiones, encontrar un sorprendente orden en el aparente caos de la turbulencia.

6.1.1 DENSIDAD ESPECTRAL DE ENERGÍA

Una componente de la velocidad puede ser descompuesta en su valor medio y la componente turbulenta superimpuesta a ésta: $u(t) = \langle u \rangle + u'(t)$.

6.1.1.1 *Series temporales continuas*

Consideremos una serie temporal continua e infinita en el tiempo. Utilizando el operador esperanza estadística, introducimos la función de autocorrelación mediante:

$$R_u(\tau) = \left\langle u'(t)u'(t+\tau) \right\rangle \tag{6.1}$$

que depende del lapso τ que separa los dos instantes en que se evalúa nuestra serie temporaes. Evidentemente, en particular $R_u(0) = \left\langle u'(t)^2 \right\rangle = \sigma_u^2$, es decir,

$R_u(0)$ es dos veces la energía cinética turbulenta de la componente. Aplicando ahora la transformación integral de Fourier, introducimos:

$$\Phi_u(\omega) = \hat{R}_u(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_u(\tau) e^{-\iota\omega\tau} d\tau \tag{6.2}$$

y la transformación inversa, que proporciona:

$$R_u(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_u(\omega) e^{\iota\omega\tau} d\omega \tag{6.3}$$

Particularizando en $\tau = 0$:

$$\sigma_u^2 = R_u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_u(\omega) d\omega \tag{6.4}$$

En otras palabras, $\Phi_u(\omega)$ expresa cómo la energía cinética turbulenta se distribuye respecto a la frecuencia ω.

Podemos simplificar estas expresiones observando que, por simetría, la definición (6.1) implica la paridad de la función de correlación $R_u(-\tau) = R_u(\tau)$. Por lo tanto, de (6.2) inferimos:

$$\Phi_u(\omega) = 2\int_{0}^{+\infty} R_u(\tau) \cos \omega\tau d\tau \tag{6.5}$$

Ésta última muestra que también Φ_u es una función par ($\Phi_u(-\omega) = \Phi_u(\omega)$), luego:

$$R_u(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \Phi_u(\omega) \cos \omega\tau d\omega \tag{6.6}$$

y

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \Phi_u(\omega) d\omega \tag{6.7}$$

o bien, introduciendo $f = \omega/2\pi$ y $S_u = 2\Phi_u$:

$$\sigma_u^2 = \int_{0}^{+\infty} S_u(f) df \tag{6.8}$$

Podemos ver claramente que $S_u(f)df$ es la contribución a la energía que proporcionan las oscilaciones armónicas de frecuencia *f*. Es por ello que llamamos a $S(f)$, y por extensión a $\Phi_u(\omega)$, función de densidad espectral de energía. La energía cinética total K contenida entre las frecuencias f_1 y f_2 viene dada por:

$$K(f_1, f_2) = \int_{f_1}^{f_2} S_u(f)df \tag{6.9}$$

6.1.1.2 *Series temporales finitas*

Sin embargo, en la práctica se parte necesariamente de datos observados, y por tanto, tenemos siempre registros de longitud finita (llamémosla $2T$). Nuestras series temporales están truncadas, de modo que:

$$u_T'(t) = \begin{cases} u'(t), & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases} \tag{6.10}$$

y escribimos la función de correlación:

$$R_{u;T}(\tau) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} u_T'(t)u_T'(t+\tau)dt \tag{6.11}$$

obteniendo $R_{u;T}(\tau) = 0$ para todos los casos en que $|\tau| > 2T$. Procedemos a calcular la densidad espectral de energía:

$$\begin{aligned}\Phi_{u;T}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{u;T}(\tau)e^{-\iota\omega\tau}d\tau = \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\iota\omega\tau}\left(\int_{-T}^{+T} u_T'(t)u_T'(t+\tau)dt\right)d\tau = \\ &= \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{+\infty} u_T'(t)e^{\iota\omega t}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_T'(t+\tau)e^{-\iota\omega(t+\tau)}d\tau\right)dt\end{aligned} \tag{6.12}$$

ya que podemos extender los límites en la integral (6.10) hasta el infinito, por anularse el integrando fuera de la región de interés. Con el sencillo cambio de variable $t + \tau = s$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\Phi_{u;T}(\omega) &= \frac{1}{2T}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_T'(t)e^{\iota\omega t}dt\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_T'(s)e^{-\iota\omega s}ds\right) = \\ &= \frac{1}{2T}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_T'(t)e^{-\iota\omega t}dt\right)^*\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_T'(t)e^{-\iota\omega t}dt\right) = \\ &= \frac{1}{2T}\hat{u}_T'(\omega)^*\hat{u}_T'(\omega) = \frac{1}{2T}\left|\hat{u}_T'(\omega)\right|^2\end{aligned} \tag{6.13}$$

lo que demuestra que $\Phi_T(\omega)$ es no negativa.

Sería de interés demostrar que para un valor de T suficientemente grande, las funciones de correlación y densidad espectral de energía se aproximan a las que obtendríamos para una serie temporal infinitamente larga teóricamente. En efecto, retomando la expresión (6.11) y aplicando el operador esperanza:

$$\left\langle R_{u;T}(\tau)\right\rangle = \begin{cases} \dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T-\tau}\left\langle u'(t)u'(t+\tau)\right\rangle dt, & 0 \le \tau < 2T \\ \dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T+|\tau|}^{T}\left\langle u'(t)u'(t+\tau)\right\rangle dt, & 2T < \tau \le 0 \\ 0, & 2T \le |\tau| \end{cases}$$

$$\left\langle R_{u;T}(\tau)\right\rangle = \begin{cases} \dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T-\tau} R(\tau)dt, & 0 \le \tau < 2T \\ \dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T+|\tau|}^{T} R(\tau)dt, & 2T < \tau \le 0 \\ 0, & 2T \le |\tau| \end{cases}$$

$$\left\langle R_{u;T}(\tau)\right\rangle = \begin{cases} \dfrac{1}{2T}(2T-|\tau|)\,R(\tau), & |\tau| < 2T \\ 0, & 2T \le |\tau| \end{cases}$$

y por lo tanto, para $|\tau| < 2T$:

$$\lim_{T\to\infty}\left\langle R_{u;T}(\tau)\right\rangle = R_u(\tau) \tag{6.14}$$

A partir de esto:

$$\lim_{T\to\infty}\left\langle \Phi_{u;T}(\omega)\right\rangle = \lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\langle R_{u;T}(\tau)\right\rangle e^{-\iota\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} R_u(\tau)e^{-\iota\omega\tau}d\tau = \Phi_u(\omega) \tag{6.15}$$

6.1.1.3 *Series temporales discretas*

Supongamos ahora que nuestra serie temporal no sólo es finita en extensión temporal, de longitud T, sino que además es discreta, es decir, está constituida por un conjunto de N valores equiespaciados en el tiempo:

$$u_i = u(t_i); \qquad t_i = i\Delta t; \qquad i = 0,1,...,N-1 \tag{6.16}$$

con $\Delta t = T/N$. Supondremos además por conveniencia que N es un número par. Pues bien, en este caso, la función de correlación es también discreta:

$$R_{u;j} = \left\langle u_i' u_{i+j}'\right\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} u_i' u_{i+j}' \tag{6.17}$$

Para que la función de correlación esté convenientemente definida para un rango adecuado de valores de j, debemos entender la serie temporal como si

ésta fuera periódica, es decir, una sucesión de datos que se repite una y otra vez desplazada en el tiempo:

$$u_{i+j} = \begin{cases} u_{i+j-N}, & i+j \geq N \\ u_{i+j+N}, & i+j < 0 \end{cases}$$

De esta forma, la función de correlación, tal como es definida en (6.17), también resulta periódica de período N. La función asociada al espectro de la energía está definida sólo para N valores discretos de frecuencia $\omega_k = k\Delta\omega$ ($k = 0,\pm1,\ldots,\pm N/2$) y $\Delta\omega = 2\pi/T$. Se obtiene a partir de la de correlación mediante una transformada discreta de Fourier:

$$\Phi_{u;k} = \hat{R}_{u;k} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} R_{u;j} e^{-\iota\frac{2\pi jk}{N}}, \qquad k = 0,1,\ldots,N-1 \tag{6.18}$$

si bien, tal como se recoge en el Apéndice A en el apartado sobre la transformación discreta de Fourier, debe recordarse que los valores con $k > N/2$, corresponden en realidad a frecuencias negativas y con valor absoluto $\Delta\omega(k - N)$. La transformación discreta inversa proporciona:

$$R_{u;j} = \sum_{k=0}^{N-1} \Phi_{u;k} e^{\iota\frac{2\pi jk}{N}}, \qquad j = 0,1,\ldots,N-1 \tag{6.19}$$

La energía cinética contenida en las fluctuaciones es justamente la mitad de:

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} u_i'^2 = R_{u;0} = \sum_{k=0}^{N-1} \Phi_{u;k} \tag{6.20}$$

Por tanto, Φ_k representa (salvo un factor dos) la energía cinética asociada al modo de frecuencia ω_k, la energía comprendida, pongamos, en el intervalo de frecuencias ($\omega_k - \Delta\omega/2$, $\omega_k + \Delta\omega/2$). Se trata, por tanto de una magnitud con dimensiones de energía y no de densidad de energía (energía por unidad de frecuencia) como ocurría en el caso continuo.

La función asociada al espectro de energía puede ser escrita de una manera diferente, para de esta manera obtener una relación equivalente a la (6.13):

$$\Phi_{u;k} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} R_{u;j} e^{-\iota\frac{2\pi jk}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} e^{-\iota\frac{2\pi jk}{N}} \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} u_i' u_{i+j}' =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} u_i' e^{\iota\frac{2\pi ik}{N}} \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} u_{i+j}' e^{-\iota\frac{2\pi(i+j)k}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} u_i' e^{\iota\frac{2\pi ik}{N}} \frac{1}{N}\sum_{l=i}^{i+N-1} u_l' e^{-\iota\frac{2\pi lk}{N}} = \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} u_i' e^{\iota\frac{2\pi ik}{N}} \frac{1}{N}\left(\sum_{l=i}^{N-1} u_l' e^{-\iota\frac{2\pi lk}{N}} + \sum_{l=N}^{i+N-1} u_l' e^{-\iota\frac{2\pi lk}{N}}\right) = \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} u_i' e^{\iota\frac{2\pi ik}{N}} \frac{1}{N}\left(\sum_{l=i}^{N-1} u_l' e^{-\iota\frac{2\pi lk}{N}} + \sum_{l=N}^{i+N-1} u_{l-N}' e^{-\iota\left(\frac{2\pi lk}{N}-2\pi k\right)}\right) = \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} u_i' e^{\iota\frac{2\pi ik}{N}} \frac{1}{N}\left(\sum_{l=i}^{N-1} u_l' e^{-\iota\frac{2\pi lk}{N}} + \sum_{l'=0}^{i-1} u_{l'}' e^{-\iota\frac{2\pi l'k}{N}}\right) = \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} u_i' e^{\iota\frac{2\pi ik}{N}} \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} u_l' e^{-\iota\frac{2\pi lk}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\left(u_i' e^{-\iota\frac{2\pi ik}{N}}\right)^* \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} u_l' e^{-\iota\frac{2\pi lk}{N}}
\end{aligned}
$$

donde se ha hecho uso de las propiedades de periodicidad ($u_l' = u_{l-N}'$ para $l \geq N$). Aplicando la definición de transformada:

$$\Phi_{u;k} = \left(\hat{u}_k'\right)^* \hat{u}_k' = \left|\hat{u}_k'\right|^2 \tag{6.21}$$

Introduciendo (6.21) en (6.20) recuperamos la llamada identidad de Parseval:

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} u_i'^2 = \sum_{k=0}^{N-1}\left|\hat{u}_k'\right|^2 \tag{6.22}$$

Por otro lado, de la Proposición 2 del Apéndice A, se desprende:

$$\Phi_{u;N-k} = \left(\hat{u}_{N-k}'\right)^* \hat{u}_{N-k}' = \hat{u}_k'\left(\hat{u}_k'\right)^* = \left|\hat{u}_k'\right|^2 = \Phi_{u;k} \tag{6.23}$$

Introducimos la densidad espectral de energía, es decir, la energía por unidad de frecuencia:

$$S_{u;k} = \begin{cases} \Phi_{u;k} / \Delta f, & k = 0 \\ 2\Phi_{u;k} / \Delta f, & k = 1, 2, ..., N/2 - 1 \\ \Phi_{u;k} / \Delta f, & k = N/2 \end{cases} \tag{6.24}$$

con $\Delta f = \Delta\omega/2\pi = 1/T$, y haciendo uso de la propiedad (6.23) podemos reescribir (6.20) en la forma:

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} u_i'^2 = \sum_{k=0}^{N/2} S_{u;k}\Delta f \tag{6.25}$$

La ecuación (6.25) representa la aproximación discreta a la expresión (6.8).

6.1.2 ESPECTRO CRUZADO

El espectro de energía, antes introducido revela cómo se distribuye la energía respecto al frecuencia. De manera análoga, dadas dos series temporales u_1 y u_2 (tales como dos componentes de la velocidad, o como ocurrirá en nuestro caso, dos velocidades medidas en dos puntos diferentes), podemos analizar cómo es la correspondencia entre ambas señales en el dominio de la frecuencia. Para ello transformamos la función de covarianza al espacio de Fourier.

6.1.2.1 *Series temporales continuas*

La función de covarianza se define mediante:

$$R_{u_1,u_2}(\tau) = \left\langle u_1'(t) u_2'(t+\tau) \right\rangle \tag{6.26}$$

La mayor diferencia respecto a la función de correlación para una sola variable $R_u(\tau)$ es que $R_{u_1,u_2}(\tau)$ ya no es una función par en τ. Introducimos el espectro cruzado como la transformada de Fourier de la función de covarianza:

$$\Lambda_{u_1,u_2}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{u_1,u_2}(\tau) e^{-\iota\omega\tau} d\tau \tag{6.27}$$

La parte real y la parte imaginaria del espectro cruzado reciben el nombre de *coespetro* y *espectro de cuadratura* respectivamente:

$$\Lambda_{u_1,u_2}(\omega) = \mathrm{Co}_{u_1,u_2}(\omega) + \iota \mathrm{Qu}_{u_1,u_2}(\omega) \tag{6.28}$$

También podemos escribirlo en función de su ángulo de fase $\theta_{u_1,u_2}(\tau)$:

$$\Lambda_{u_1,u_2}(\omega) = \left|\Lambda_{u_1,u_2}(\omega)\right| e^{\iota\theta_{u_1,u_2}(\omega)} \tag{6.29}$$

con:

$$\left|\Lambda_{u_1,u_2}(\omega)\right| = \sqrt{\mathrm{Co}_{u_1,u_2}(\omega)^2 + \mathrm{Qu}_{u_1,u_2}(\omega)^2} \tag{6.30}$$

y

$$\theta_{u_1,u_2}(\omega) = \arctan \frac{\mathrm{Qu}_{u_1,u_2}(\omega)}{\mathrm{Co}_{u_1,u_2}(\omega)} \tag{6.31}$$

El coespectro es, además, la parte par en la frecuencia del espectro cruzado:

$$\begin{aligned}\mathrm{Co}_{u_1,u_2}(\omega) &= \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} R_{u_1,u_2}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{u_1,u_2}(\tau)\cos\omega\tau d\tau = \\ &= \int_{0}^{+\infty}\left[R_{u_1,u_2}(-\tau)+R_{u_1,u_2}(\tau)\right]\cos\omega\tau d\tau\end{aligned} \tag{6.32}$$

mientras que el espectro de cuadratura es su parte impar en la frecuencia:

$$\begin{aligned}\mathrm{Qu}_{u_1,u_2}(\omega) &= \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} R_{u_1,u_2}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right) = -\int_{-\infty}^{+\infty} R_{u_1,u_2}(\tau)\sin\omega\tau d\tau = \\ &= \int_{0}^{+\infty}\left[R_{u_1,u_2}(-\tau)-R_{u_1,u_2}(\tau)\right]\sin\omega\tau d\tau\end{aligned} \tag{6.33}$$

Además, atendiendo a (6.30) y (6.31), esto implica que $\left|\Lambda_{u_1,u_2}(\omega)\right|$ es una función par y que $\theta_{u_1,u_2}(\omega)$ es una función impar.

6.1.2.2 *Series temporales finitas*

Cuando partimos de una señal observada, el registro de la misma debe ser necesariamente finito en el tiempo. Consideremos que se dispone de una señal medida entre los instantes $-T$ y $+T$. La covarianza y el espectro cruzado adoptan la forma:

$$R_{u_1,u_2;T}(\tau) = \begin{cases}\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{+T} u_1^{\cdot}(t)u_2^{\cdot}(t+\tau)dt, & |\tau| < 2T \\ 0 & |\tau| \geq 2T\end{cases} \tag{6.34}$$

$$\Lambda_{u_1,u_2;T}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{u_1,u_2;T}(\tau)e^{-\iota\omega\tau}d\tau \tag{6.35}$$

puede escribirse, tras un razonamiento paralelo al que condujo a la expresión (6.13):

$$\Lambda_{u_1,u_2;T}(\omega) = \frac{1}{2T}\,\hat{u}_{1;T}^{\cdot}(\omega)^{*}\,\hat{u}_{2;T}^{\cdot}(\omega) \tag{6.36}$$

Por último, cabe mencionar que es fácilmente demostrable de manera análoga a cómo hicimos en el párrafo anterior, las convergencias al límite siguientes:

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}\left\langle R_{u_1,u_2;T}(\tau)\right\rangle &= R_{u_1,u_2}(\tau)\\ \lim_{T\to\infty}\left\langle \Lambda_{u_1,u_2;T}(\tau)\right\rangle &= \Lambda_{u_1,u_2}(\tau)\end{aligned} \tag{6.37}$$

6.1.2.3 *Series temporales discretas*

La definición dada aquí para la función de covarianza es:

$$R_{u_1,u_2;j} = \left\langle u'_{1;i}u'_{2;i+j}\right\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} u'_{1;i}u'_{2;i+j} \tag{6.38}$$

El espectro cruzado se obtiene a partir de la transformada discreta de la anterior:

$$\Lambda_{u_1,u_2;k} = \mathrm{Co}_{u_1,u_2;k} + \iota\,\mathrm{Qu}_{u_1,u_2;k} = \left|\Lambda_{u_1,u_2;k}\right| e^{\iota\theta_{u_1,u_2;k}} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} R_{u_1,u_2;j} e^{-\iota\frac{2\pi jk}{N}} \tag{6.39}$$

Finalmente, idéntica deducción a la que condujo a la obtención de (6.21) puede hacerse aquí para llegar a:

$$\Lambda_{u_1,u_2;k} = \left(\hat{u}'_{1;k}\right)^* \hat{u}'_{2;k} \tag{6.40}$$

6.1.3 COHERENCIA ESPECTRAL

En ocasiones puede resultar de utilidad normalizar la amplitud del espectro cruzado de una manera que revele si dos series temporales tienen una estructura paralela a una determinada frecuencia con independencia de la presencia de un desfase angular. La magnitud utilizada es la coherencia espectral.

6.1.3.1 *Series temporales continuas*

Definimos la coherencia espectral mediante:

$$\Gamma_{u_1,u_2}(\omega) = \frac{\left|\Lambda_{u_1,u_2}(\omega)\right|}{\sqrt{\Phi_{u_1}(\omega)\Phi_{u_2}(\omega)}} = \sqrt{\frac{\mathrm{Co}_{u_1,u_2}(\omega)^2 + \mathrm{Qu}_{u_1,u_2}(\omega)^2}{\Phi_{u_1}(\omega)\Phi_{u_2}(\omega)}} \tag{6.41}$$

Es evidente que, si $u_1 = u_2$, entonces $\mathrm{Qu}_{u_1,u_2}(\omega) = 0$ y $\left|\Lambda_{u_1,u_2}(\omega)\right| = \Phi_{u_1}(\omega)$, y por tanto $\Gamma_{u_1,u_2}(\omega) = 1$ para todo ω. En el lado opuesto, si no hay ningún tipo de correlación entre las señales, se tiene $R_{u_1,u_2}(\tau) = 0$ independientemente del lapso τ, de dónde $\left|\Lambda_{u_1,u_2}(\omega)\right| = 0$ para todo ω, y la coherencia se hace idénticamente

nula. La coherencia es, por tanto, un coeficiente de correlación espectral. Es además una función par en la frecuencia.

En ocasiones puede resultar de utilidad invertir la secuencia de relaciones anteriores. La recíproca de la expresión (6.27) es:

$$\begin{aligned} R_{u_1,u_2}(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda_{u_1,u_2}(\omega)e^{\iota\omega\tau}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\Lambda_{u_1,u_2}(\omega)\right|e^{\iota\theta_{u_1,u_2}(\omega)}e^{\iota\omega\tau}d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma_{u_1,u_2}(\omega)\sqrt{\Phi_{u_1}(\omega)\Phi_{u_2}(\omega)}e^{\iota\left[\theta_{u_1,u_2}(\omega)+\omega\tau\right]}d\omega \end{aligned} \tag{6.42}$$

La coherencia y la raíz cuadrada son funciones pares, por tanto, retendremos sólo la parte par de la exponencial. Ya que tanto ω como $\theta_{u_1,u_2}(\omega)$ son impares en ω, ésta es $\cos\left[\theta_{u_1,u_2}(\omega)+\omega\tau\right]$, llegando finalmente a:

$$R_{u_1,u_2}(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\Gamma_{u_1,u_2}(\omega)\sqrt{\Phi_{u_1}(\omega)\Phi_{u_2}(\omega)}\cos\left[\theta_{u_1,u_2}(\omega)+\omega\tau\right]d\omega \tag{6.43}$$

6.1.3.2 *Series temporales finitas*

Sin embargo, aún existe un problema. Cuando intentamos calcular la coherencia de una serie finita a partir de la definición (6.41), topamos con que:

$$\begin{aligned} \left|\Lambda_{u_1,u_2;T}(\omega)\right| &= \frac{1}{2T}\left|\hat{u}'_{1;T}(\omega)\right|\left|\hat{u}'_{2;T}(\omega)\right| = \sqrt{\frac{1}{2T}\left|\hat{u}'_{1;T}(\omega)\right|^2\frac{1}{2T}\left|\hat{u}'_{2;T}(\omega)\right|^2} = \\ &= \sqrt{\Phi_{u_1;T}(\omega)\Phi_{u_2;T}(\omega)} \end{aligned} \tag{6.44}$$

donde se ha hecho uso de (6.36) y de (6.13). Por lo tanto la coherencia es idénticamente igual a la unidad para todo valor de la frecuencia. Y esto es así independientemente del valor de T, incluso aunque este sea muy grande.

Para sortear esta dificultad, debemos introducir una función de alisado para las estimaciones espectrales. De esta manera:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{u;T}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_{u;T}(\omega')h(\omega'-\omega)d\omega' = \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{u}'_{T}(\omega')^2\right|h(\omega'-\omega)d\omega' \\ \tilde{\Lambda}_{u_1,u_2;T}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\Lambda_{u_1,u_2;T}(\omega')h(\omega'-\omega)d\omega' = \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{u}'_{1;T}(\omega')^*\hat{u}'_{2;T}(\omega')h(\omega'-\omega)d\omega' \end{aligned} \tag{6.45}$$

La función de alisado h puede interpretarse como una media local de la densidad espectral hecha para aumentar la fiabilidad estadística de la misma. Para un valor de ancho de banda Δ dado, puede tomarse:

$$h(\Omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta}, & \text{si } |\Omega| \leq \dfrac{\Delta}{2} \\ 0, & \text{si } |\Omega| > \dfrac{\Delta}{2} \end{cases} \tag{6.46}$$

La desigualdad de Schwartz asegura, para toda h no negativa en todo su dominio, y distinta de la función nula, que se cumpla:

$$\left|\tilde{\Lambda}_{u_1,u_2;T}(\omega)\right|^2 \leq \tilde{\Phi}_{u_1;T}(\omega)\tilde{\Phi}_{u_2;T}(\omega) \tag{6.47}$$

con la igualdad si y sólo si $u_1 = u_2$. Nuestra definición de coherencia será ahora:

$$\Gamma_{u_1,u_2;T}(\omega) = \frac{\left|\tilde{\Lambda}_{u_1,u_2;T}(\omega)\right|}{\sqrt{\tilde{\Phi}_{u_1;T}(\omega)\tilde{\Phi}_{u_2;T}(\omega)}} \tag{6.48}$$

La coherencia así definida es siempre menor que la unidad, pero su valor preciso depende del esquema concreto de alisado utilizado. Esto debe tenerse en cuenta cuando se valore la coherencia como coeficiente de correlación entre dos señales. Sólo tiene sentido comparar valores de coherencia obtenidos con el mismo esquema de alisado.

6.1.3.3 *Series temporales discretas*

El mismo problema discutido anteriormente ocurre en el caso de series temporales discretas:

$$\left|\Lambda_{u_1,u_2;k}\right| = \left|\hat{u}'_{1;k}\right|\left|\hat{u}'_{2;k}\right| = \sqrt{\Phi_{u_1;k}\Phi_{u_2;k}} \tag{6.49}$$

Esto sucede independientemente de la frecuencia de muestreo empleada, por grande que sea la resolución. Antes de calcular la coherencia espectral ha de introducirse un paso previo de alisado, de tipo análogo al caso de series continuas. Normalmente, de forma análoga al caso continuo, se aplica:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_{u;k} &= \frac{1}{2n+1}\sum_{k'=k-n}^{k+n}\Phi_{u;k'} \\ \tilde{\Lambda}_{u_1,u_2;k} &= \frac{1}{2n+1}\sum_{k'=k-n}^{k+n}\Lambda_{u,v;k'}\end{aligned} \tag{6.50}$$

con n en función del ancho de banda en que se quiera realizar el alisado. La definición de coherencia válida aquí es:

$$\Gamma_{u_1,u_2;k} = \frac{\left|\tilde{\Lambda}_{u_1,u_2;k}\right|}{\sqrt{\tilde{\Phi}_{u_1;k}\tilde{\Phi}_{u_2;k}}} \tag{6.51}$$

Insistimos en que el valor concreto de la coherencia es dependiente del tipo de alisado empleado y de su ancho de banda.

6.2 RESULTADOS Y COMPARACIÓN CON DATOS EXPERIMENTALES

6.2.1 DATOS EXPERIMENTALES

Puede encontrarse un conjunto de datos experimentales acerca de densidad espectral de energía turbulenta y coherencia espacial en Højstrup [1999]. Estos datos fueron obtenidos a partir de medidas realizadas en el parque eólico de Nørrekær Enge II Windfarm. Esta instalación se compone de una matriz de 42 turbinas Nordtank de 300 kW, con un diámetro de rotor $D = 28$ m y una altura de buje $h = 31$ m. Su localización es en Jutlandia del Norte, a unos 36 km al este de de Ålborg y 8 km al norte de Løgstør, Dinamarca. La configuración del parque consiste en dos conjuntos de tres filas con siete turbinas en cada una de ellas, como puede verse en la Figura 6.1. Además de la matriz de turbinas hay también dos mástiles en el parque. Uno de ellos, llamado M2 está situado bien dentro de la red de aerogeneradores, sobre la línea que une las turbinas E5 y F6, a una distancia de 55 m de F6. Este mástil recibe, por tanto, las estelas generadas por las diferentes turbinas que lo rodean. Cuando la dirección del viento es aproximadamente 30º respecto al Norte, el mástil se encuentra dentro de la estela creada por F6 a la distancia de $2D$ de ella, mientras que cuando la dirección es la opuesta M2 experimenta la estela debida a E5, a una distancia de $7{,}5D$. También se han

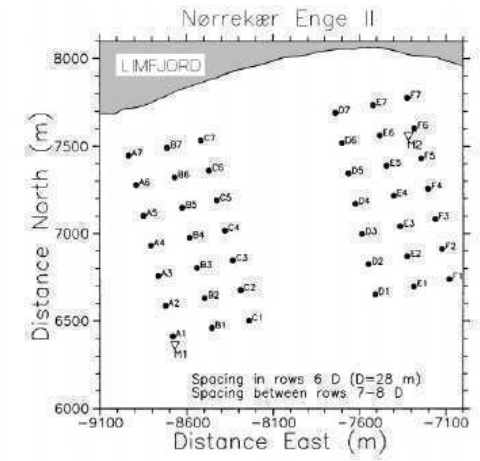

Figura 6.1. *Configuración del parque eólico Nørrekær Enge II Windfarm. Posición relativa de turbinas y mástiles.*

examinado, a efectos de comparación, datos de la estela ocasionada por D5, a una distancia de 14,5D.

La disposición de los anemómetros montados en el mástil se muestra en Figura 6.2. Existen mediciones a dos alturas diferentes sobre el suelo que aproximadamente corresponden con la altura del buje de las turbinas h y el extremo superior de rotor $h+D/2$. Se colocaron dos anemómetros de copa situados en los lados opuestos de M2 a cada una de las dos alturas, con el objeto de obtener medias experimentales de la coherencia espectral lateral.

El conjunto de datos experimentales fue subdividido en diferentes categorías en función de la velocidad media del viento registrada. Se tomaron tres diferentes intervalos: 6–8 m/s, 8–10 m/s y 10–13 m/s, a los que se ha llamado respectivamente categorías "7 m/s", "9 m/s" y "11,5 m/s". La velocidad del viento utilizada para la selección de la categoría fue la medida en la altura más alta de las dos, que corresponde aproximadamente con $h+D/2$. Los datos disponibles son un conjunto de 15 casos 2D, 12 casos 7,5D y 62 14,5D. Cada caso esta constituido por una serie temporal de 30 minutos de duración.

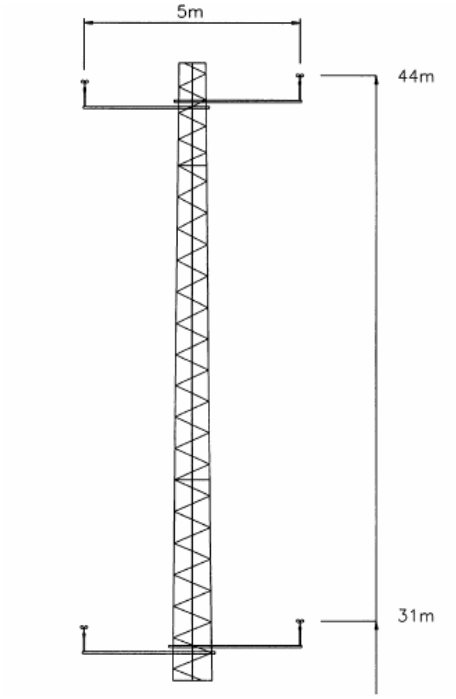

Figura 6.2. *Posición relativa de los anemómetros montados en el mástil M2.*

6.2.2 MODELOS ANALÍTICOS PARA LA COHERENCIA ESPACIAL

Por coherencia espacial nos referimos a la coherencia espectral entre las dos señales de la componente longitudinal de la velocidad (según la dirección media del viento) en dos puntos entre los que existe una separación espacial dada. Los resultados experimentales y numéricos para la coherencia espacial (vertical y lateral) serán comparados con sencillos modelos propuestos en la literatura.

6.2.2.1 *Modelo de Panofsky−Dutton*

El siguiente modelo para la coherencia espacial de la componente de velocidad en la dirección media del flujo fue propuesto por Panofsky y Dutton [1984] y utilizado como referencia por Højstrup [1999]:

$$\Gamma(f) = e^{-\frac{asf}{U}} \tag{6.52}$$

donde f es la frecuencia, s es la separación espacial, U la velocidad media del viento, y a es una constante de valor $a = 6 + 5,5(y_2 - y_1)/y_{\text{med}}$, siendo y_1 y y_2 las cotas de ambos puntos entre los que se mide la coherencia, e $y_{\text{med}} = (y_1+y_2)/2$.

6.2.2.2 *Modelo IEC 61400−1*

La norma International Standard IEC 61400-1 Ed.3, publicada en Mayo de 2005, propone la siguiente correlación para la coherencia espacial de la componente longitudinal de la velocidad:

$$\Gamma(f) = e^{-8,8\left[\left(\frac{sf}{U}\right)^2 + \left(\frac{0,12s}{L_c}\right)^2\right]^{1/2}} \tag{6.53}$$

L_c se denomina parámetro de escala de coherencia, y su valor se calcula en función de la altura de la aeroturbina h. Para alturas menores de 60 m la norma da $L_c = 5,67h$

6.2.3 RESULTADOS NUMÉRICOS OBTENIDOS DE LA SIMULACIÓN DE GRANDES ESCALAS

Se han realizado un conjunto de cálculos mediante el modelo de grandes escalas simulando las condiciones en que se realizaron los experimentos descritos anteriormente. De esta forma, se han obtenido resultados numéricos de densidad espectral de potencia así como de coherencia espacial, en puntos situados a distancias de $2D$ y $7,5D$ aguas abajo de la turbina con las mismas posiciones relativas que muestra la Figura 6.2. También se han realizados cálculos de análisis espectral en ausencia de estela para efectos comparativos.

Los parámetros del modelo se establecen como sigue. En Højstrup [1999] se especifica que el terreno sobre el que se ubica el parque es un antiguo lecho marino extremadamente plano, situado un metro por encima del nivel del mar, con una rugosidad estimada de algunos centímetros. Por tanto, se ha tomado el valor $y_0 = 3$ cm para la rugosidad del suelo. Los coeficientes de empuje C_T para velocidades del viento incidente de 7 m/s, 9 m/s y 11,5 m/s a la altura $h+D/2$ se obtienen de la curva de empuje de la turbina Nordtank 300 kW, Figura 6.3. Estos valores de velocidad son ligeramente superiores a los que se dan a la altura del buje de la turbina, para los que se establecen las curvas de potencia y empuje de la máquina. Por ello se ha introducido una leve corrección aplicando la ley de la pared. Finalmente se llega a los valores para C_T de 0,68, 0,63 y 0,56 respectivamente. Para los tres casos la simulación

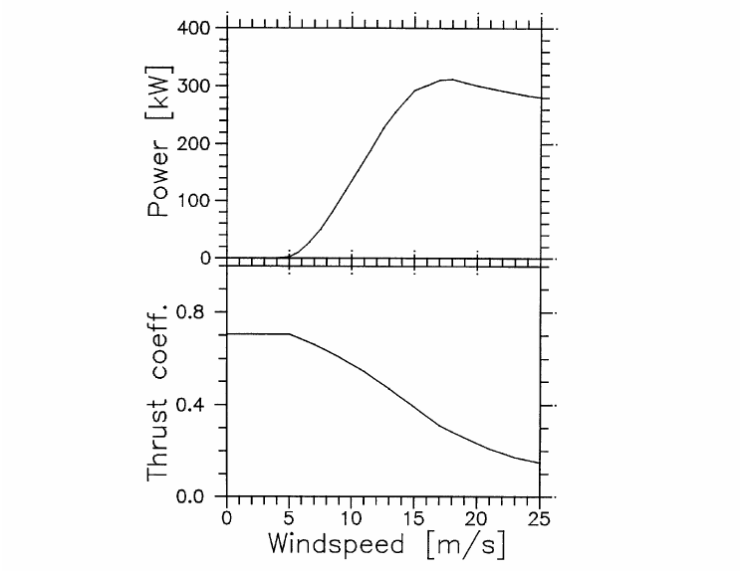

Figura 6.3. *Curvas de potencia y coeficiente de empuje para la turbina Nordtank* 300 *kW.*

se prolongó por un total de 8192 segundos, lo que permite obtener un total de ocho series temporales de 1024 segundos cada una. Después de obtener la transformada discreta de Fourier mediante al algoritmo FFT, la densidad espectral de energía y la coherencia espacial se calcularon mediante un alisado de 0,07 décadas de ancho de banda. Los espectros de energía y coherencia se promedian dentro de cada categoría, siguiendo el mismo procedimiento utilizado por Højstrup [1999] en el tratamiento de sus datos experimentales.

6.2.3.1 *Resultados de la densidad espectral de energía*

En lo que sigue se mostrarán los resultados obtenidos para la densidad espectral de potencia S en los diferentes casos analizados. Se realiza una comparación con los resultados de Højstrup [1999], por lo que analizaremos las mismas situaciones presentadas por este autor. Por tanto, se diferencian tres valores de la velocidad incidente sobre la turbina, las cuales representan a su vez tres valores del coeficiente de empuje, tal como ha sido descrito en el apartado anterior. También se diferencia entre las dos posibles situaciones del anemómetro, es decir, las dos posibles alturas sobre el suelo. Esto proporciona un total de seis casos de estudio. En cada uno de ellos, se representa el espectro de energía en tres diferentes escenarios: en ausencia de estela, en el

interior de la estela cercana (distancia $2D$ del rótor) y en el interior de la estela lejana (distancia $7{,}5D$ del rótor). Toda la información se sumariza en las figuras 6.4 a 6.9.

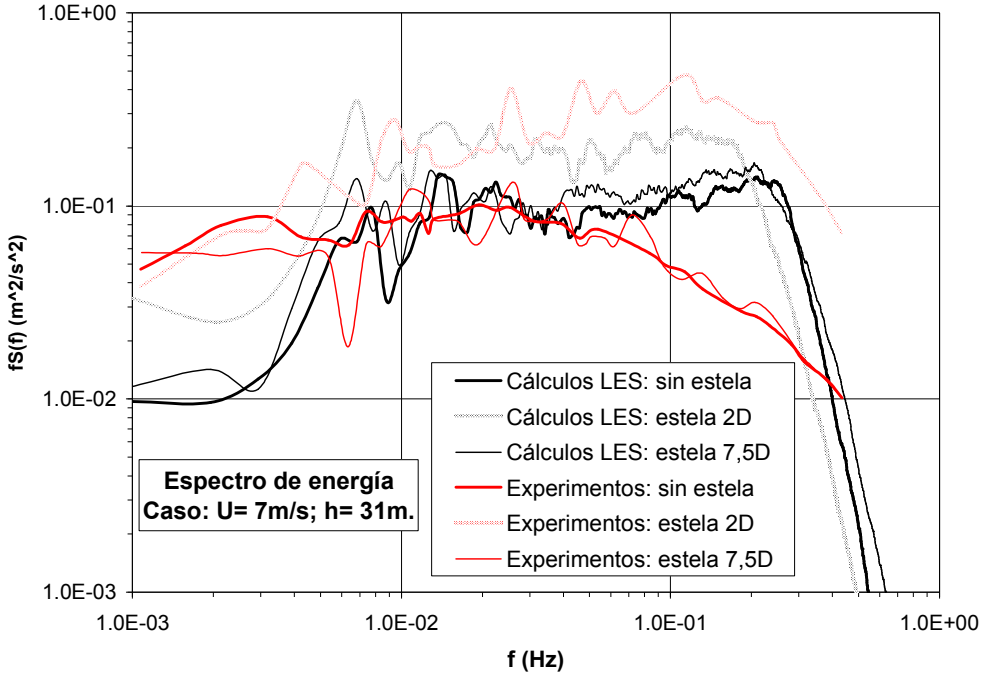

Figura 6.4. Densidad espectral de energía para $U = 7$ m/s y $h = 31$ m en los casos sin estela, estela $2D$ y estela $7{,}5D$.

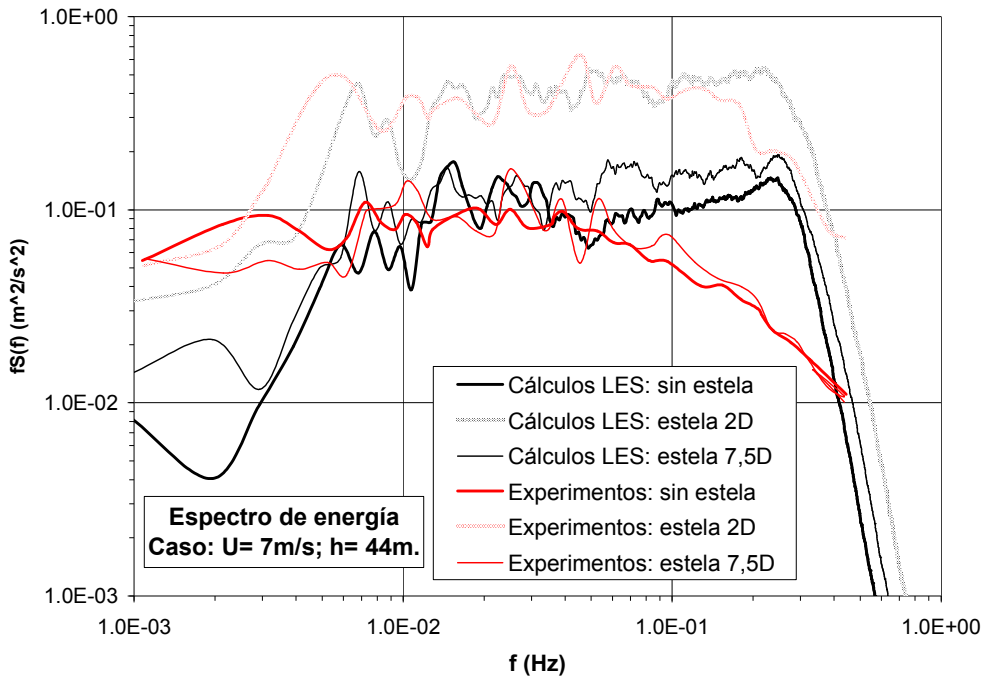

Figura 6.5. *Densidad espectral de energía para* $U = 7$ *m/s y* $h = 44$ *m en los casos sin estela, estela* $2D$ *y estela* $7{,}5D$.

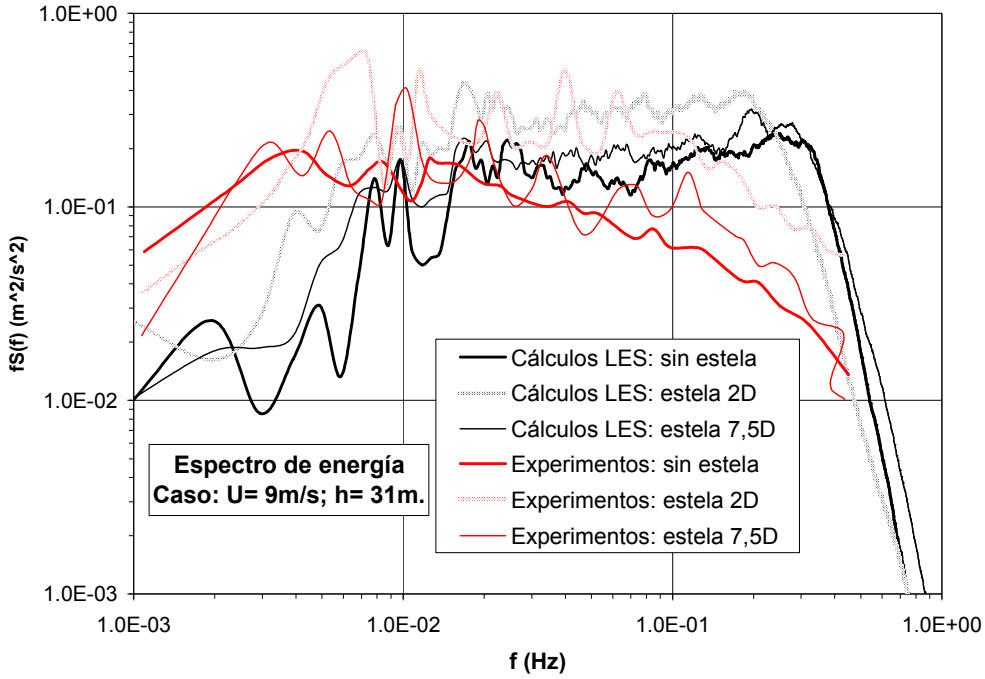

Figura 6.6. *Densidad espectral de energía para* $U = 9$ *m/s y* $h = 31$ *m en los casos sin estela, estela* $2D$ *y estela* $7{,}5D$.

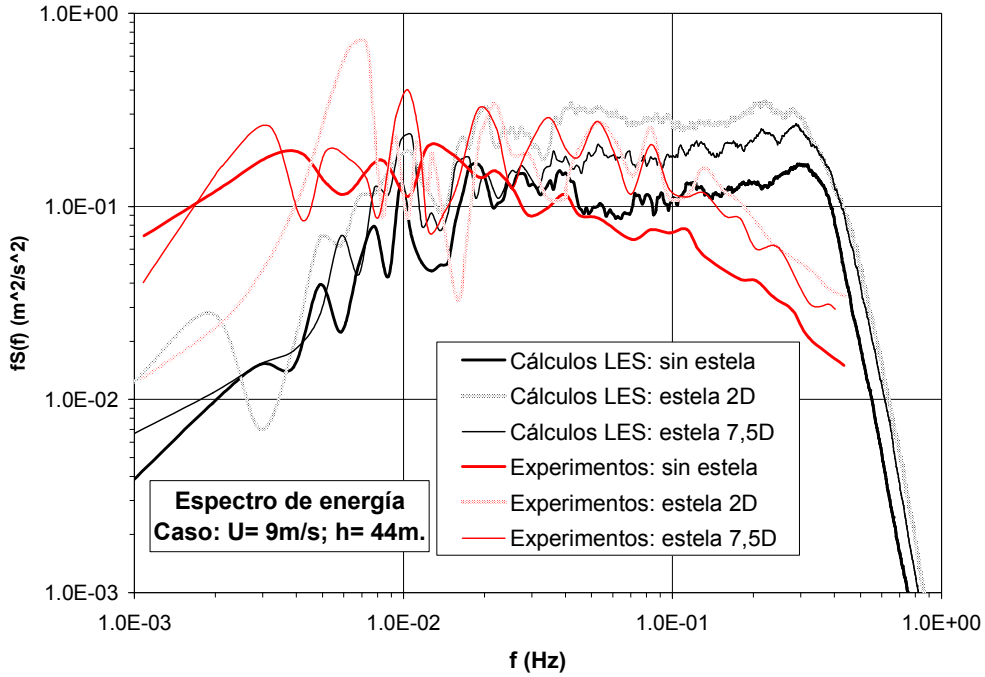

Figura 6.7. *Densidad espectral de energía para* $U = 9$ *m/s y* $h = 44$ *m en los casos sin estela, estela* $2D$ *y estela* $7{,}5D$.

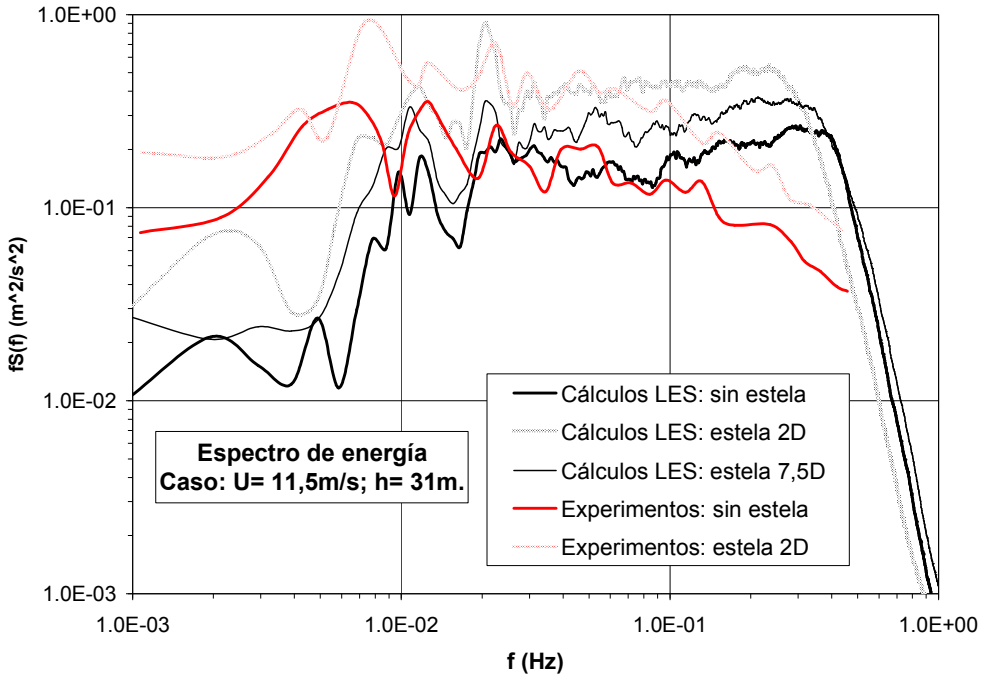

Figura 6.8. Densidad espectral de energía para $U = 11{,}5$ m/s y $h = 31$ m en los casos sin estela, estela $2D$ y estela $7{,}5D$.

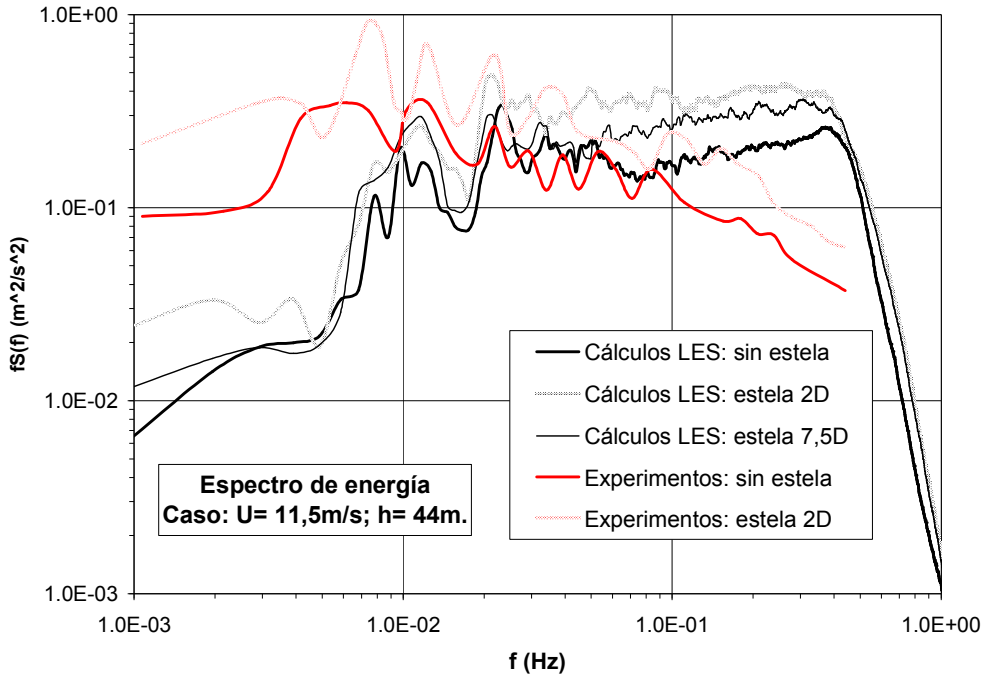

Figura 6.9. *Densidad espectral de energía para* $U = 11{,}5$ *m/s y* $h = 44$ *m en los casos sin estela, estela* $2D$ *y estela* $7{,}5D$.

En las figuras anteriores se observa claramente cómo el aumento del nivel de turbulencia que se produce en la estela empuja la curva de densidad de potencia hacia arriba. Este efecto queda especialmente claro en los casos de $U = 7$ m/s, aunque puede apreciarse en todos ellos. Además, los datos experimentales muestran que la frecuencia a la que se produce el máximo de densidad espectral de energía se desplaza hacia frecuencias mayores, es decir, para escalas de turbulencia comparables con el tamaño transversal de la estela. También se desprende de los resultados experimentales que, para la altura mayor, la diferencia entre las curvas de los casos en ausencia de estela y en estela cercana es más dilatada. La explicación que da Højstrup [1999] de este hecho es que, al estar los anemómetros de la posición más elevada en la parte superior de la estela, los efectos de "meandering" o serpenteo asociados a fluctuaciones en la dirección del viento hacen que el anemómetro quede sucesivamente dentro y fuera de la estela. En cualquier caso, el hecho de que estos anemómetros están situados en la zona de la capa de cortadura anular generada en la estela cercana es suficiente para esperar un incremento sustancial de energía turbulenta, mayor que en cualquier otro punto en la estela. Por otro lado, los experimentos muestran también que el incremento de energía turbulenta decrece con la velocidad del viento incidente. Esto es debido a que el coeficiente de empuje de la turbina disminuye con la velocidad, de manera que la extracción de momento de la corriente es menor y los gradientes de velocidad en la estela son también menores.

Con respecto a la comparación entre los resultados obtenidos durante las simulaciones y los experimentales, cabe señalar los siguientes comentarios:

- A frecuencias medias existe concordancia en el nivel de densidad espectral predicho por los cálculos y el obtenido experimentalmente. El fuerte incremento de turbulencia en la estela se refleja en la separación entre las curvas para los casos de no estela y estela cercana. Esta separación es similar en los cálculos y las medidas experimentales.
- En todos los casos se observa que el espectro obtenido para el caso de estela lejana se encuentra comprendido entre los espectros de no estela y estela cercana. El nivel de turbulencia es en general más próximo al caso de no estela. Este hecho es reflejado también por los cálculos.
- A bajas frecuencias la densidad espectral de energía es subestimada por el cálculo. Este aspecto podría tener relación con la alta estacionalidad del modelo empleado, que contrasta con las posibles variaciones de la

velocidad media del viento incidente en ciclos del orden del período de medida de las series temporales.

- A altas frecuencias la concordancia entre resultados de las simulaciones y los experimentos no es satisfactoria. En los cálculos el valor del máximo de densidad espectral de energía se encuentra desplazado hacia valores altos de la frecuencia. Este hecho queda registrado también en algún caso experimental (caso $U = 7$ m/s, $h = 31$ m), pero el comportamiento general consiste en un decaimiento suave del espectro de potencia. La consecuencia de esto es una sobrestimación de la densidad espectral de potencia en la zona de altas frecuencias por parte del modelo de cálculo. Este efecto podría deberse al hecho de que las condiciones de contorno periódicas impuestas dan lugar a que en realidad sea simulada una fila de infinitas turbinas en lugar de una sola turbina aislada. La distancia a la que se encuentran se considera suficientemente grande como para que cualquier grado de interacción se considere imposible, aunque a la vista del comportamiento del espectro a altas frecuencias obtenido, podría ser necesaria la revisión de esa hipótesis.

6.2.3.2 *Resultados de la coherencia espectral*

Dos casos de coherencia espacial han sido analizados. Por un lado, la coherencia lateral entre dos puntos situados a cada lado del mástil (ver Figura 6.2) a una distancia de 5 m y situados a una misma altura. Por el otro, la coherencia vertical entre puntos a diferentes alturas sobre el suelo, con una separación de 13 m. Los resultados referentes a la coherencia lateral se muestran en las figuras 6.10 a 6.15 y los relativos a la coherencia vertical aparecen en las figuras 6.16 a 6.18.

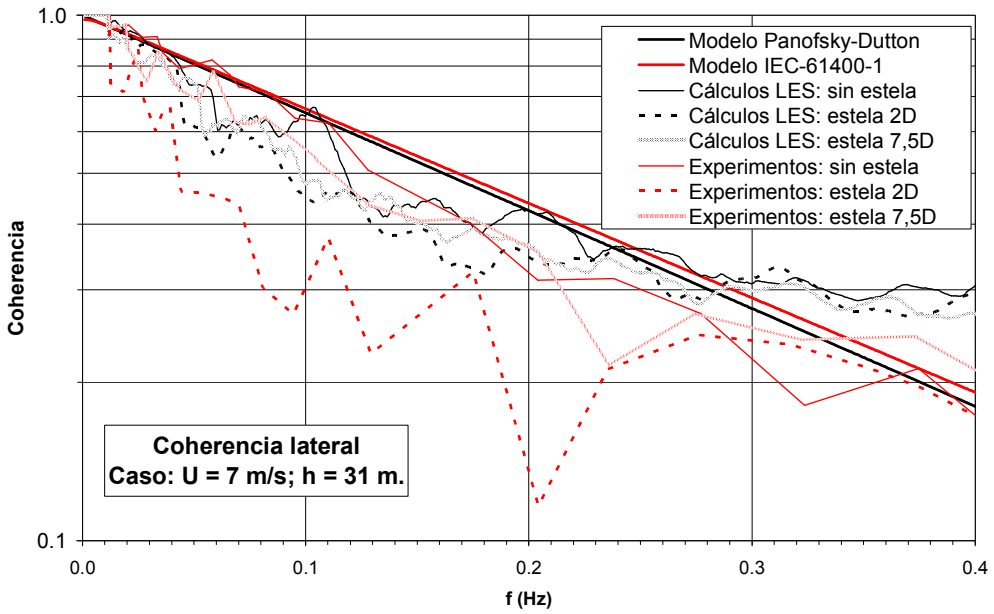

Figura 6.10. *Coherencia lateral para* $U = 7$ *m/s y* $h = 31$ *m. Modelos analíticos, cálculos LES y resultados experimentales.*

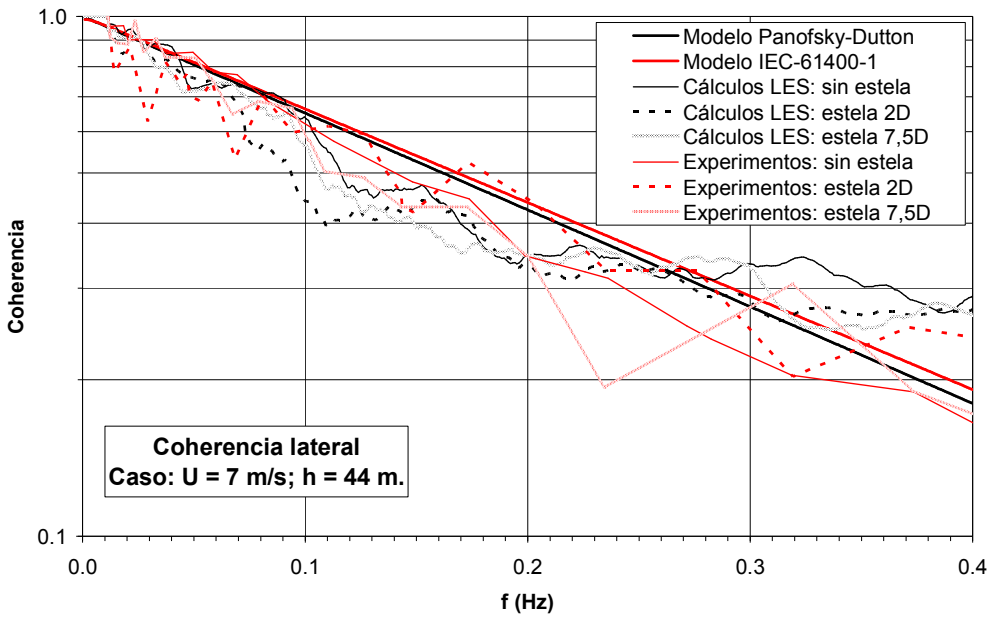

Figura 6.11. *Coherencia lateral para* $U = 7$ *m/s y* $h = 44$ *m. Modelos analíticos, cálculos LES y resultados experimentales.*

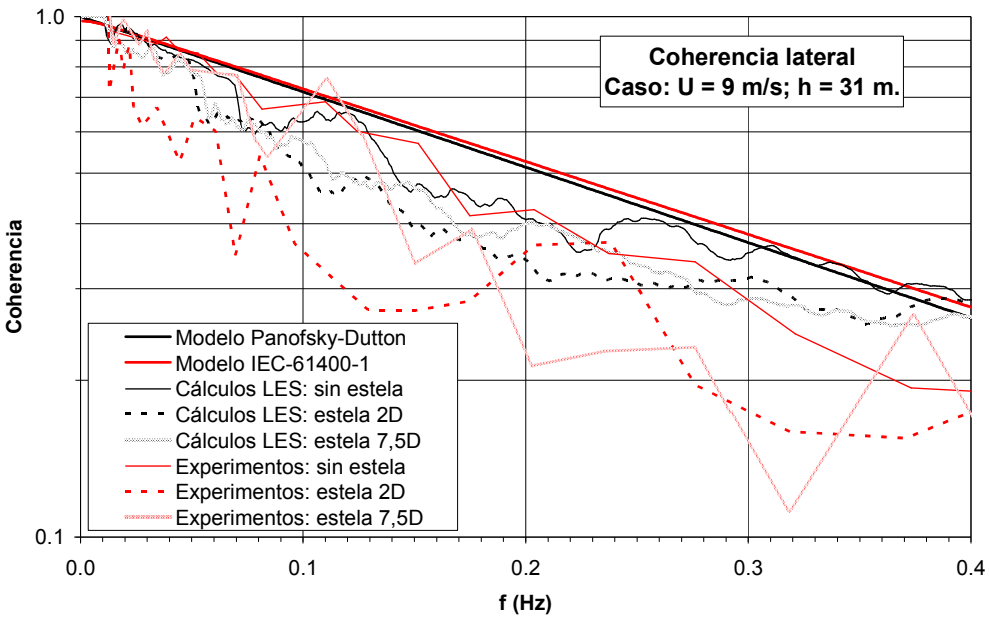

Figura 6.12. *Coherencia lateral para* $U = 9$ *m/s y* $h = 31$ *m. Modelos analíticos, cálculos LES y resultados experimentales.*

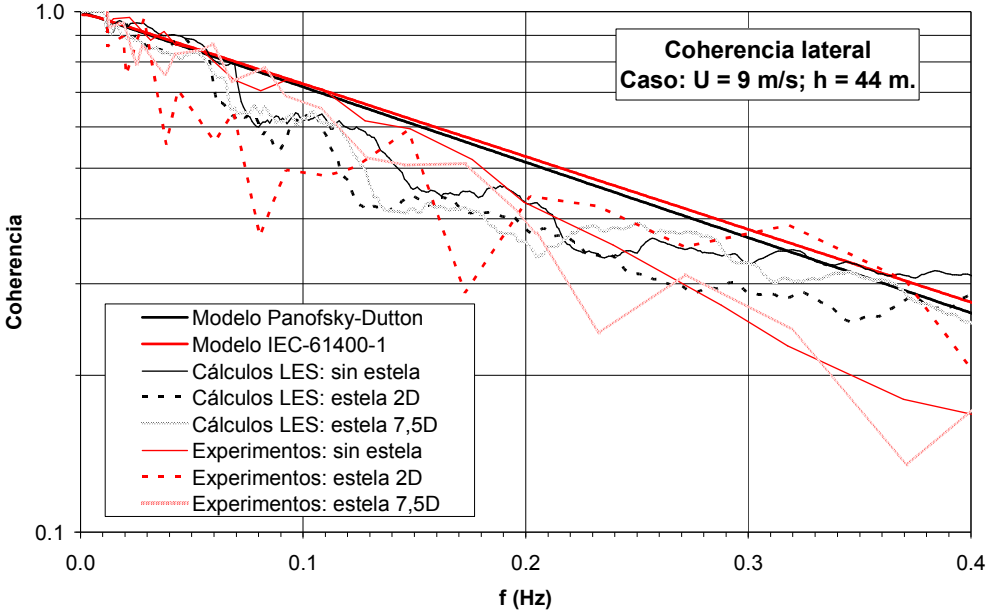

Figura 6.13. *Coherencia lateral para* $U = 9$ *m/s y* $h = 44$ *m. Modelos analíticos, cálculos LES y resultados experimentales.*

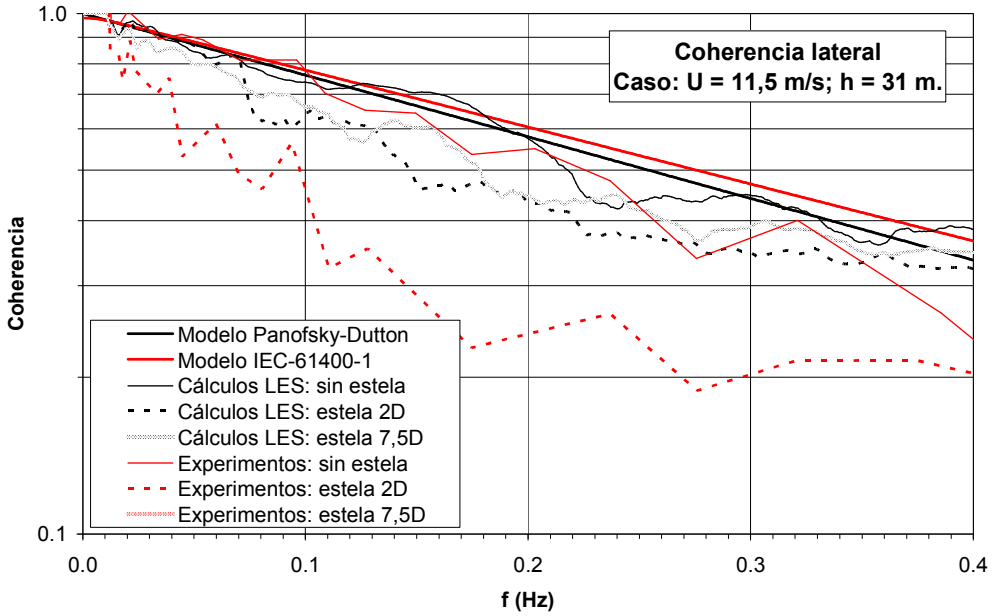

Figura 6.14. Coherencia lateral para $U = 11{,}5$ m/s y $h = 31$ m. Modelos analíticos, cálculos LES y resultados experimentales.

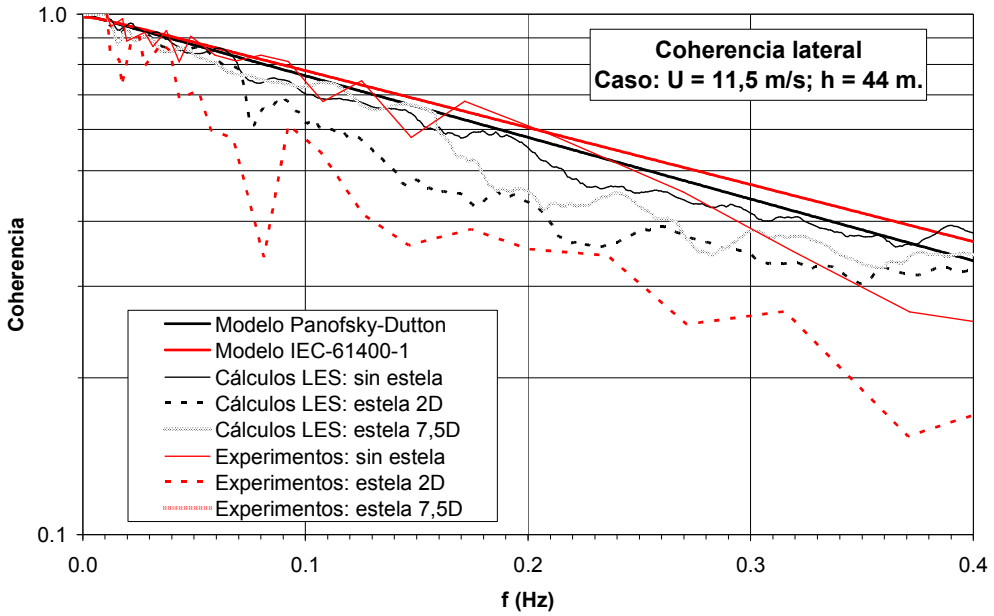

Figura 6.15. *Coherencia lateral para* $U = 11{,}5$ *m/s y* $h = 44$ *m. Modelos analíticos, cálculos LES y resultados experimentales.*

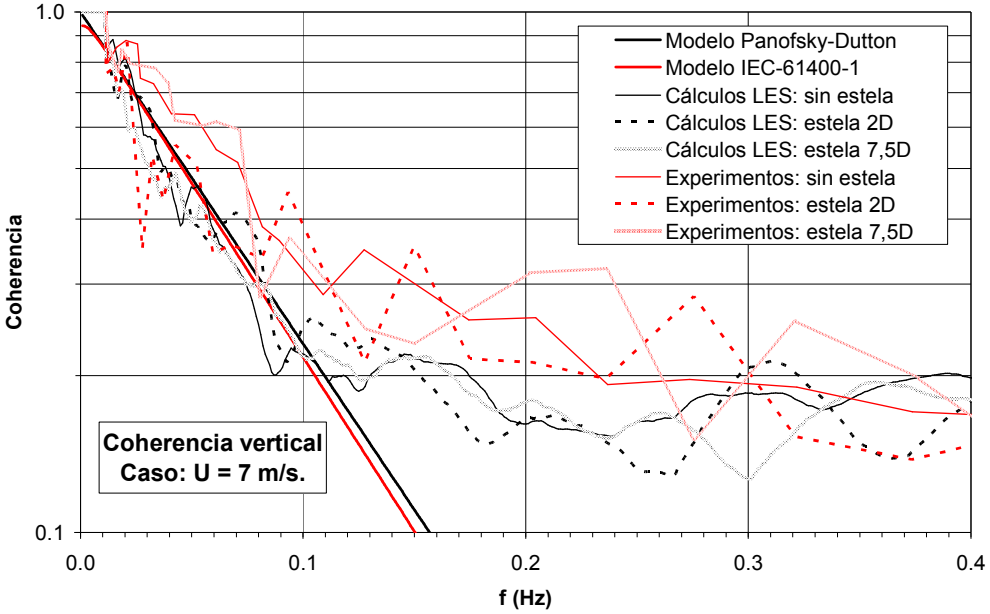

Figura 6.16. *Coherencia vertical para* $U = 7$ *m/s. Modelos analíticos, cálculos LES y resultados experimentales.*

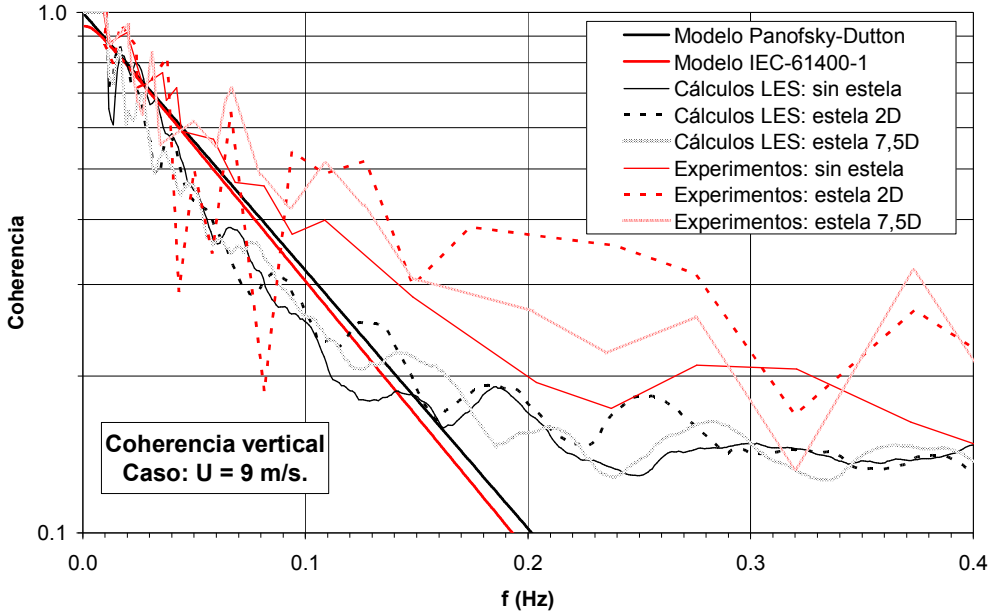

Figura 6.17. *Coherencia vertical para* $U = 9$ *m/s. Modelos analíticos, cálculos LES y resultados experimentales.*

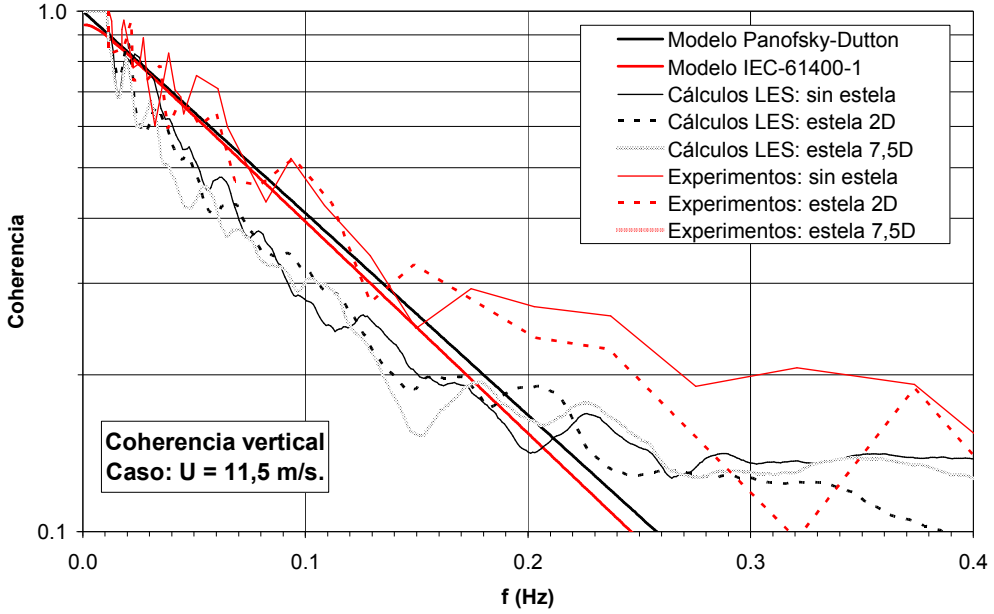

Figura 6.18. *Coherencia vertical para* $U = 11{,}5$ *m/. Modelos analíticos, cálculos LES y resultados experimentales.*

A la vista de las comparaciones realizadas en las figuras referentes a la coherencia espacial, se sugieren los siguientes comentarios:

- En general, existe un buen acuerdo cualitativo entre los resultados numéricos y los experimentales.
- El modelo de Panofsky−Dutton (6.52), así como el propuesto en la norma IEC 61400−1, ecuación (6.53), funcionan bien en la mayoría de los casos, particularmente en el caso de la coherencia lateral. Las dos fórmulas proporcionan predicciones muy similares.
- La coherencia lateral predicha por los modelos suele ser mayor tanto que los valores experimentales como que los calculados mediante LES. Sin embargo, los resultados numéricos se acercan más que los experimentales a los valores de coherencia dados por ambos modelos.
- Por otro lado, los resultados numéricos y los experimentales coinciden en predecir valores de coherencia vertical mayores que los dados por los modelos analíticos para altas frecuencias. Sin embargo, el valor de frecuencia a partir del cual sucede este "tumbado" de la curva de coherencia parece tener relación directa con el ancho de banda de alisado utilizado. A pesar de que a este hecho no se le suele prestar mucha atención, para una correcta interpretación de la coherencia espacial como medida de la correlación entre las dos señales sería deseable clarificar siempre el esquema de alisado.
- Tanto en los experimentos como en los cálculos no se aprecian diferencias sustanciales entre la coherencia vertical registrada en presencia o en ausencia de estela, excepto quizás para el caso $U = 9$ m/s (Figura 6.17), en el que los experimentos muestran un cierto incremento de la coherencia en la estela cercana ($2D$).
- Por el contrario, los valores de coherencia lateral son menores en la estela cercana que en ausencia de estela, siendo este efecto más acusado en el caso de los experimentos. Véanse las figuras 6.10 a 6.15.
- No existe una influencia significativa sobre la coherencia en la zona de estela lejana ($7{,}5D$), dónde los valores parecen bastante similares a los del flujo de viento no perturbado.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

7.1 CONCLUSIONES

A lo largo de la presente Tesis doctoral se ha desarrollado una metodología enfocada a la realización de simulaciones numéricas con el objeto de caracterizar la turbulencia generada en la estela de una turbina eólica. Lo novedoso del punto de vista empleado radica en la técnica para tratar el problema de cierre de la turbulencia. Se ha adoptado el procedimiento de la Simulación de Grandes Escalas (LES, de sus siglas en inglés Large–Eddy Simulation), capaz de resolver explícitamente las escalas más grandes de la turbulencia, las que controlan el comportamiento dinámico de la estela. Los modelos más complejos existentes hasta la fecha, se basan en métodos de cierre turbulento del tipo RANS (Reynolds Averaged Navier–Stokes equations) que realizan un promedio sobre la totalidad de las escalas turbulentas involucradas en el problema, y proporcionan una solución estacionaria constituida por los valores medios de las magnitudes turbulentas. Esto implica que se produce una pérdida de información importante durante el proceso, ya que se tratan de la misma manera todas las escalas de la turbulencia, sin tener en cuenta que el papel de las más grandes es muy diferente del que juegan las pequeñas en la dinámica del fenómeno turbulento. LES proporciona una solución tridimensional y completamente no estacionaria del campo fluido con unos recursos computacionales muy razonables. Por ello consideramos LES conceptualmente más apropiado para estudiar el fenómeno de la estela de una aeroturbina.

Por otro lado, uno de los objetivos más importantes de esta Tesis radicaba en ser capaces de realizar la Simulación de Grandes Escalas de la estela embebida en un entorno con propiedades turbulentas similares a las propias de la capa límite atmosférica. Es decir, es de gran importancia reproducir las características del viento real atmosférico, para después añadir el modelo de turbina y observar el comportamiento de la estela en el seno de ese viento numérico de características próximas al viento físico. A este respecto señalamos las siguientes conclusiones:

- La condición de contorno impuesta en el borde inferior del dominio de cálculo es apropiada para que el perfil de velocidad satisfaga la ley logarítmica de la pared.
- La condición de contorno de cortadura constante en el plano superior del recinto computacional asegura un esfuerzo cortante constante con la distancia al suelo. Este contexto implica una situación de anisotropía turbulenta próxima a la que se produce en la atmósfera.
- Las simulaciones de flujo en canal con condiciones de contorno de entrada y salida periódicas reproducen el comportamiento de la turbulencia atmosférica en los siguientes aspectos:
  - Perfil de velocidad: la ley logarítmica de la pared es aproximadamente satisfecha.
  - Esfuerzo cortante: se reproduce una situación de esfuerzo cortante constante.
  - Energía cinética turbulenta del flujo incidente sobre la turbina: valores similares a las medidas experimentales disponibles.
  - Anisotropía: la distribución de la energía cinética turbulenta entre las tres componentes diagonales del tensor de esfuerzos turbulentos de Reynolds es próxima a la experimental.

Una vez logrado el objetivo anterior, el paso siguiente ha sido la introducción del modelo de turbina eólica en el seno de dicho flujo. Se ha utilizado un modelo de disco actuador, en el que la turbina se representa a través de una serie de fuerzas de volumen o sumideros de momento, que extraen una cantidad de movimiento apropiada de la corriente, en función del coeficiente de empuje de la turbina. Las simulaciones LES permiten obtener valores de las oscilaciones turbulentas de las magnitudes fluidas. Especial énfasis ha sido puesto en las componentes del tensor de esfuerzos de Reynolds debido a que una de las motivaciones de la esta Tesis estriba en obtener

información acerca de la intensidad de turbulencia añadida en la estela, y la posible interacción entre distintas turbinas que de ello pudiera derivarse. Se ha realizado una comparación entre los resultados obtenidos y datos experimentales obtenidos en campo, y con correlaciones analíticas propuestas por diversos autores. Las conclusiones alcanzadas son las siguientes:

- En general, existe un buen acuerdo entre los datos experimentales y los resultados numéricos. Aspectos como el defecto de velocidad generado en la estela, así como la posición y el valor de los picos de intensidad de turbulencia existentes en la capa de cortadura de la estela cercana, o la tasa de decaimiento de la intensidad de turbulencia con la distancia a la turbina son correctamente reproducidos.
- En las correlaciones cruzadas de las fluctuaciones turbulentas de las componentes de la velocidad se predice la tendencia correcta observada experimentalmente. No en todos los casos el acuerdo es bueno cuantitativamente, si bien la irregularidad en los datos experimentales manejados hace complicado establecer la magnitud real de las discrepancias.
- El modelo no reproduce la tendencia a la isotropía en el núcleo de la estela sugerida por algunos datos experimentales y otros cálculos anteriores; véase Gómez–Elvira *et al.* [2005].

Además de lo anterior, el carácter no estacionario de la solución proporcionada por el modelo LES permite la realización de un análisis espectral de la turbulencia, al que no se había podido llegar hasta ahora a partir de modelos turbulentos de tipo RANS. De esta manera, se ha hecho posible examinar cómo se modifican propiedades como la densidad espectral de energía y la coherencia espacial en presencia de la turbina. Estos cálculos han sido llevados a cabo y los resultados se han comparado con datos experimentales de este tipo con el objeto de comprobar si las predicciones del modelo LES se ajustan a las observaciones. También se han comparado con fórmulas analíticas. Las conclusiones más relevantes a este respecto han sido presentadas en el capítulo anterior. Cabe hacer énfasis en los siguientes aspectos:

- Los valores de densidad espectral obtenidos se ajustan aceptablemente a los experimentales para valores medios de la frecuencia, si bien se alejan de ellos para frecuencias bajas y altas.

- Los cálculos predicen correctamente que existe un decremento del valor de la coherencia espacial lateral para todo el rango de frecuencias en el seno de la estela cercana (a distancias del orden de dos diámetros). Este efecto es observado también experimentalmente. Sin embargo no está claro que se mantenga a distancias mayores aguas abajo de la turbina.
- Tanto de los cálculos numéricos y de los experimentales se desprende que no existe una influencia significativa de la estela sobre la coherencia espacial vertical, o al menos entre puntos tan distantes como las posiciones de los anemómetros que se utilizaron para tomar las medidas experimentales.
- Existe influencia del procedimiento de alisado a la hora de realizar los cálculos que conducen a la obtención de la coherencia espectral. Este hecho no se menciona en la normativa de diseño de turbinas; sin embargo debería tenerse en cuenta.

Los resultados anteriores indican que este modelo LES, con condiciones de contorno simplificadas y haciendo uso de la aproximación del disco actuador, es una herramienta muy útil para caracterizar la turbulencia real existente en las estelas de las aeroturbinas. El método facilita información no sólo de las propiedades turbulentas medias sino también de las oscilaciones detalladas del flujo y de los torbellinos de mayor tamaño que la malla. Muchas propiedades del flujo turbulento han sido correctamente predichas con las simulaciones. Además, estos resultados se obtienen con un coste computacional más que razonable, al alcance de cualquiera que pueda disponer de un ordenador personal de gama media de entre los existentes actualmente en el mercado.

Por primera vez algunas características turbulentas como los espectros y la coherencia espacial han sido reproducidas por nuestros cálculos, si bien en algunos aspectos los resultados no son suficientemente satisfactorios.

7.2 TRABAJO FUTURO

Aprovechando el carácter no estacionario de las simulaciones LES, podrían estudiarse apropiadamente ciertos fenómenos. Un posible trabajo futuro podría ser el análisis de los valores extremos de las fluctuaciones

turbulentas de ciertas magnitudes de interés, como la velocidad, la energía cinética turbulenta, etc. En general, el estudio de cualquier efecto no estacionario, o que implique el análisis de una serie temporal de datos de una magnitud que varíe espacial y temporalmente podría ser una aplicación del modelo LES desarrollado en esta Tesis doctoral.

Planteamos como una posible aplicación interesante de este modelo el estudio del fenómeno del serpenteo de la estela conocido como *meandering effect*. Este fenómeno está causado por la variación de la dirección de la velocidad media del viento. En general, los modelos no reproducen este efecto puesto que se toma como condición de contorno de entrada una velocidad del viento constante, en módulo y dirección. Una posibilidad para forzar el cambio en la dirección media de avance del flujo incidente sobre la turbina podría consistir en la introducción de ciertas fuerzas de volumen que modifiquen la dirección del viento con una determinada frecuencia en una sección anterior a aquélla en la que se encuentra nuestra turbina eólica.

Más allá de lo comentado anteriormente, esbozamos a continuación algunas posibles líneas de investigación futuras:

a) Sustitución del modelo de disco actuador por uno del tipo *actuator line*, en los que las fuerzas de volumen se distribuyen a lo largo de líneas que representan los álabes de la turbina. Esta metodología ha sido aplicada en algunos trabajos recientes, como el debido a Trolborg *et al.* [2007].

b) Realización de simulaciones en que se introduzcan dos o más turbinas distribuidas espacialmente. De esta forma se podrían analizar los efectos de interacción no lineales entre varias estelas entrecruzadas.

c) Las perturbaciones orográficas son una fuente adicional de intensidad de turbulencia en los parques eólicos. El estudio de la influencia del terreno en caso de orografía sencilla, introduciendo apropiadamente las condiciones de contorno en el suelo mediante técnicas del tipo *inmerse boundary* (u otras que se considerasen convenientes) podría resultar de gran interés.

APÉNDICE A

TRANSFORMACIONES DE FOURIER

A.1 TRANSFORMACIÓN INTEGRAL DE FOURIER

SERIES DE FOURIER

A principios del siglo XIX, mientras trabajaba en la búsqueda de soluciones analíticas al problema de la transmisión del calor, por cuyo estudio recibió el premio de matemáticas del Instituto de Paris de 1811, Jean B. Fourier advirtió que *toda función arbitraria en un intervalo* $[-T/2,+T/2]^{(*)}$ *puede ser descrita en serie de senos y cosenos*:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t \tag{A.1}$$

donde $\omega_k = 2\pi k/T$, y los coeficientes a_k y b_k se obtienen de:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \omega_k t dt \qquad\qquad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \omega_k t dt \tag{A.2}$$

Es inmediato comprobar que la expresión clásica anterior es totalmente equivalente a la siguiente:

(*) sujeta a la restricción de ser lo que hoy llamamos continua a trozos, es decir, con a lo sumo un número finito de discontinuidades de salto en el intervalo de definición.

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\iota\omega_k t} \tag{A.3}$$

junto con:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-\iota\omega_k t} dt \tag{A.4}$$

La transformación integral de Fourier nace de forma natural como paso al límite de ésta serie de Fourier para el caso en que el intervalo de definición de la función se hace infinito $T \to \infty$. En efecto, introduciendo (A.4) en (A.3):

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\iota\omega_k t} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-\iota\omega_k \tau} d\tau \tag{A.5}$$

Reescribimos $1/T$ como $\Delta\omega/2\pi$, con $\Delta\omega = \omega_{k+1}$-$\omega_k$:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{2\pi} e^{\iota\omega_k t} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-\iota\omega_k \tau} d\tau \tag{A.6}$$

Tomemos ahora el límite. Cuando $T \to \infty$, $\Delta\omega$ se hace infinitesimalmente pequeño y ω pasa a ser una variable continua, de modo que:

$$f(t) \overset{T\to\infty}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{\iota\omega t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-\iota\omega\tau} d\tau \right) \tag{A.7}$$

DEFINICIÓN

El anterior paso al límite sugiere la siguiente definición de transformación integral, directa e inversa, denominada transformación de Fourier:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\iota\omega t} dt \tag{A.8}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{\iota\omega t} d\omega \tag{A.9}$$

Otros factores de normalización son propuestos también en la literatura por distintos autores, así como un cambio de signo en los exponentes de (A.8) y

(A.9), lo que supone cambiar los papeles de transformada y antitransformada. Todas las formulaciones son equivalentes.

La versión multidimensional de la transformada y antitransformada de Fourier es la generalización de las expresiones (A.8) y (A.9). Para el caso con m dimensiones, se tiene:

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{r}) e^{-\iota \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^m\mathbf{r} \tag{A.10}$$

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{\iota \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^m\mathbf{k} \tag{A.11}$$

PROPIEDAD

Las transformaciones integrales de Fourier (A.8) (directa) y (A.9) (inversa) son operadores lineales.

PROPOSICIÓN 1

a) Si f es una función real, entonces $\hat{f}(-\omega) = \hat{f}(\omega)^*$.

b) Si f es una función imaginaria, entonces $\hat{f}(-\omega) = -\hat{f}(\omega)^*$.

La demostración de esta propiedad es inmediata, a partir de que los operadores integración y conjugación conmutan.

PROPOSICIÓN 2

La transformación de Fourier no cambia la simetría de la función:

Demostración:

$$\hat{f}(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\iota(-\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\iota\omega(-t)} dt =$$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t) e^{-\iota\omega(-t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{-\iota\omega t'} dt' = \hat{f}(\omega), & \text{si } f \text{ es par} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} -f(-t) e^{-\iota\omega(-t)} dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{-\iota\omega t'} dt' = -\hat{f}(\omega), & \text{si } f \text{ es impar} \end{cases}$$

Las dos proposiciones anteriores determinan una serie de propiedades de simetría entre una función y su tranformada de Fourier, que se esquematizan a modo de tabla resumen a continuación:

Si se tiene f ...	**... entonces $\hat{f}$ es:**
real y par	real y par
real e impar	imaginaria e impar
imaginaria y par	imaginaria y par
imaginaria e impar	real e impar

Tabla A.1. *Correspondencia entre distintas simetrías de la transformada de Fourier.*

TRANSFORMADAS SENO Y COSENO

Cuando la función a transformar es par, se acostumbra a expresar su transformada de Fourier de la siguiente manera:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\iota\omega t}dt = 2\hat{f}_c(\omega)$$

con

$$\hat{f}_c(\omega) = \int_{0}^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt \tag{A.12}$$

denominada habitualmente *transformada del coseno*. Dado que, como se ha visto, la transformada es también una función par, la inversa puede ser escrita en la forma:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{\iota\omega t}d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\cos\omega t d\omega = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \hat{f}_c(\omega)\cos\omega t d\omega \tag{A.13}$$

Del mismo modo, cuando la función a transformar es impar, su transformada se presenta habitualmente en la forma:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\iota\omega t}dt = -2\iota\hat{f}_s(\omega)$$

siendo

$$\hat{f}_s(\omega) = \int_{0}^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt \tag{A.14}$$

la *transformada del* seno. Y su inversa, teniendo en cuenta que la transformada es también una función impar, se expresa:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{\iota\omega t}d\omega = \frac{\iota}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\sin\omega t dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \hat{f}_s(\omega)\sin\omega t dt \tag{A.15}$$

PROPOSICIÓN 3: TEOREMA DE CONVOLUCIÓN

Sea $h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$. Si las transformadas de Fourier de f y g existen, entonces $\hat{h}(\omega) = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$.

Demostración:

$$\hat{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-\iota\omega t}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-\iota\omega\tau}g(t-\tau)e^{-\iota\omega(t-\tau)}d\tau dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-\iota\omega\tau}g(u)e^{-\iota\omega u}dtdu = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-\iota\omega\tau}dt\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{-\iota\omega u}du = \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$$

Corolario 1*:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)e^{\iota\omega t}d\omega \tag{A.16}$$

Corolario 2*:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(-\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)d\omega \tag{A.17}$$

PROPOSICIÓN 4: IDENTIDAD DE PARSEVAL

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega \tag{A.18}$$

Demostración:

a.) Demostremos la identidad (A.18) para el caso en que f sea una función con simetría definida, ya sea par o impar. Haciendo uso del segundo corolario de la proposición anterior:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t)^* dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\pm f(-t)^*\right] dt = \\ &= \pm\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\widehat{f^*}(\omega)d\omega = \pm\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\hat{f}(-\omega)^* d\omega = \\ &= \pm\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\left[\pm\hat{f}(\omega)^*\right] d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega\end{aligned}$$

donde el signo + se refiere al caso en que f es par, y el − al caso en que f es impar.

b.) Sea f una función genérica. Denotamos por medio de f^+ y f^- a sus partes par e impar respectivamente:

$$f^+(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2}, \qquad \text{con } f^+(-t) = f^+(t)$$
$$f^-(t) = \frac{f(t)-f(-t)}{2}, \qquad \text{con } f^-(-t) = -f^-(t)$$

Ahora demostramos que se cumple la identidad de Parseval para f:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f^+(t)+f^-(t)\right|^2 dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f^+(t)\right|^2 dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f^-(t)\right|^2 dt + 2\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} f^+(t)^* f^-(t)dt\end{aligned}$$

La última integral se anula por ser el integrando una función impar.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f^+(t)\right|^2 dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f^-(t)\right|^2 dt$$

A su vez, por la linealidad del operador transformada, en el espacio de Fourier:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{f^+}(\omega) + \widehat{f^-}(\omega)\right|^2 d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{f^+}(\omega)\right|^2 d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{f^-}(\omega)\right|^2 d\omega + 2\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f^+}(\omega)^* \widehat{f^-}(\omega) d\omega =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{f^+}(\omega)\right|^2 d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\widehat{f^-}(\omega)\right|^2 d\omega$$

donde se ha hecho uso de la Proposición 2. La demostración de (A.18) es ahora inmediata a partir de los resultados obtenidos en el apartado a.).

La identidad de Parseval debe expresarse para el caso de la transformada multidimensional de Fourier mediante:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left|f(\mathbf{r})\right|^2 d^m\mathbf{r} = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} \left|\hat{f}(\mathbf{k})\right|^2 d^m\mathbf{k} \tag{A.19}$$

A.2 FILTROS

El proceso de filtrado de una función en el espacio tridimensional se realiza a través de la convolución con una función escalar denominada filtro y denotada mediante $G_\Delta(\mathbf{r})$, donde Δ se denomina ancho del filtro:

$$\overline{\varphi}(\mathbf{r},t) = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(\mathbf{r}',t) G_\Delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \tag{A.20}$$

Aplicando la transformación directa de Fourier a ambos lados de la expresión (A.20), el teorema de convolución dicta:

$$\hat{\overline{\varphi}}(\mathbf{k}) = \hat{\varphi}(\mathbf{k}) \hat{G}_\Delta(\mathbf{k}) \tag{A.21}$$

A continuación mostramos algunos ejemplos de los filtros más utilizados en la práctica. Para todos ellos se define el número de onda de corte mediante $k_c = \pi/\Delta$.

i. Filtro *gaussiano*. Entre sus ventajas radica que es continuo e infinitamente derivable en el espacio físico y en el espacio de Fourier, siendo su transformada una nueva función *gaussiana*:

$$\begin{aligned} G_\Delta(\mathbf{r}) &= \left(\frac{\gamma}{\pi\Delta^2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\gamma|\mathbf{r}|^2}{\Delta^2}} \\ \hat{G}_\Delta(\mathbf{k}) &= e^{-\frac{\Delta^2|\mathbf{k}|^2}{4\gamma}} \end{aligned} \tag{A.22}$$

Usualmente se toma $\gamma = 6$. Este filtro es el más comúnmente utilizado.

ii. También existe el llamado filtro de *Cauchy*:

$$\begin{aligned} G_\Delta(\mathbf{r}) &= \left(\frac{a}{\pi\Delta}\right)^3 \prod_i \frac{1}{\left(\frac{x_i}{\Delta}\right)^2 + a^2} \\ \hat{G}_\Delta(\mathbf{k}) &= e^{-a\Delta\sum_i |k_i|} \end{aligned} \tag{A.23}$$

con $a = \pi/24$ normalmente.

iii. Filtro *caja*. En este caos, el filtrado es sólo una media dentro de una caja de tamaño Δ:

$$\begin{aligned} G_\Delta(\mathbf{r}) &= \begin{cases} \frac{1}{\Delta^3} & \text{si } |x_i| \leq \frac{\Delta}{2} \quad \text{para todo } i = 1,2,3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ \hat{G}_\Delta(\mathbf{k}) &= \prod_i \frac{\operatorname{sen}\left(\Delta k_i/2\right)}{\Delta k_i/2} \end{aligned} \tag{A.24}$$

iv. Aunque algo menos utilizado, también está la versión del filtro *bola* de radio Δ:

$$\begin{aligned} G_\Delta(\mathbf{r}) &= \begin{cases} \frac{1}{4\pi\Delta^3/3} & \text{si } |\mathbf{r}| \leq \Delta \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ \hat{G}_\Delta(\mathbf{k}) &= \frac{3}{\left(\Delta|\mathbf{k}|\right)^3}\left[\operatorname{sen}\left(\Delta|\mathbf{k}|\right) - \Delta|\mathbf{k}|\cos\left(\Delta|\mathbf{k}|\right)\right] \end{aligned} \tag{A.25}$$

v. Filtro *cutoff*. Se define en el espacio de *Fourier* y elimina directamente todas las componentes de número de onda mayor que k_c:

- *cutoff caja*:

$$G_\Delta(\mathbf{r}) = \prod_i \frac{\operatorname{sen}\left(\pi x_i / \Delta\right)}{\pi x_i}$$
$$\hat{G}_\Delta(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \left|k_i\right| \le k_c \quad \text{para todo } i = 1,2,3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{A.26}$$

- *cutoff bola*:

$$G_\Delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi^2 |\mathbf{r}|^3}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi |\mathbf{r}|}{\Delta}\right) - \frac{\pi |\mathbf{r}|}{\Delta}\cos\left(\frac{\pi |\mathbf{r}|}{\Delta}\right)\right]$$
$$\hat{G}_\Delta(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\mathbf{k}| \le k_c \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{A.27}$$

Una interesante propiedad de los filtros *cutoff* es que $\hat{G}_\Delta(\mathbf{k})^2 = \hat{G}_\Delta(\mathbf{k})$. Esto implica que $\overline{\overline{\varphi}}(\mathbf{r}) = \overline{\varphi}(\mathbf{r})$, como puede inferirse a partir de (A.21).

A.3 TRANSFORMACIÓN DISCRETA DE FOURIER

La transformación discreta de Fourier es el procedimiento numérico para evaluar la transformada de Fourier de una función dada de forma discreta. Supongamos que partimos de un número finito N de muestras consecutivas de una función discreta durante un período de tiempo T, de tal forma que:

$$f_j = f(t_j); \qquad t_j = j\Delta t; \qquad j = 0,1,\ldots,N-1 \tag{A.28}$$

siendo $\Delta t = T/N$ la tasa de muestreo. Supondremos en lo que sigue, por conveniencia, que N es un número par. Podemos obtener numéricamente el valor de la transformación integral de Fourier de esta función mediante:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\iota\omega t}dt \approx \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-\iota\omega t_j}\Delta t \tag{A.29}$$

La información de la muestra está constituida por N muestras equiespaciadas, por lo que es lógico pensar que la misma información puede ser recogida

utilizando N valores de la función transformada para frecuencias distribuidas también de manera uniforme. Consideremos que estas frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia básica $2\pi/T$:

$$\omega_k = k\Delta\omega = k\frac{2\pi}{T} = k\frac{2\pi}{N\Delta t}, \qquad k = 0, \pm 1, ..., \pm N/2 \tag{A.30}$$

De esta manera, obtendríamos la serie de valores discretos para la función transformada:

$$\hat{f}_k = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-\iota\omega_k t_j} = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-\iota k \frac{2\pi}{N\Delta t} j\Delta t} =$$

$$= \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-\iota \frac{2\pi jk}{N}}, \qquad k = 0, \pm 1, ..., \pm N/2 \tag{A.31}$$

Procediendo análogamente, para la transformación inversa:

$$f_j = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{\iota\omega t_j} d\omega \approx \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{f}_k e^{\iota\omega_k t_j}\Delta\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi}{N\Delta t}\sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{f}_k e^{\iota\frac{2\pi jk}{N}} = \frac{1}{N\Delta t}\sum_{k=-N/2}^{N/2} \hat{f}_k e^{\iota\frac{2\pi jk}{N}}, \quad j = 0, 1, ..., N-1 \tag{A.32}$$

Observando la expresión (A.31), se aprecia que $\hat{f}_k = \hat{f}_{k+N}$, razón por la que no tiene sentido utilizar más de N valores de la transformada, como preveíamos. Por razones de comodidad, se suelen tomar los valores $k = 0,1,\ldots,N-1$, teniendo en cuenta siempre que los valores con $k > N/2$, corresponden en realidad a frecuencias negativas y con valor absoluto $\Delta\omega(N-k)$.

La definición de las transformaciones discretas de Fourier directa e inversa normalmente empleadas parten de las relaciones (A.31) y (A.32). Reordenando los factores de normalización:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-\iota\frac{2\pi jk}{N}}, \qquad k = 0, 1, ..., N-1 \tag{A.33}$$

$$f_j = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}_k e^{\iota\frac{2\pi jk}{N}}, \qquad j = 0, 1, ..., N-1 \tag{A.34}$$

Conviene hacer notar que $\hat{f}_0$ es la media de todos los f_j.

También se puede aplicar una transformación discreta de Fourier a tensores de mayor orden. Por ejemplo para un tensor de orden tres, de dimensiones N_x, N_y, y N_z, se tendría:

$$\hat{f}_{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{1}{N_x}\frac{1}{N_y}\frac{1}{N_z}\sum_{p=0}^{N_x-1}\sum_{q=0}^{N_y-1}\sum_{r=0}^{N_z-1} f_{p,q,r} e^{-\iota 2\pi\left(\frac{p\alpha}{N_x}+\frac{q\beta}{N_y}+\frac{r\gamma}{N_z}\right)} \tag{A.35}$$

$$f_{p,q,r} = \sum_{\alpha=0}^{N_x-1}\sum_{\beta=0}^{N_y-1}\sum_{\gamma=0}^{N_z-1} \hat{f}_{\alpha,\beta,\gamma} e^{\iota 2\pi\left(\frac{p\alpha}{N_x}+\frac{q\beta}{N_y}+\frac{r\gamma}{N_z}\right)} \tag{A.36}$$

PROPOSICIÓN 1

Las transformaciones discretas de Fourier directa e inversa definidas mediante (A.33) y (A.34) son operadores recíprocos.

Lema:

Si a es un entero positivo o nulo y menor que N, entonces:

$$\sum_{l=0}^{N-1} e^{\iota\frac{2\pi a l}{N}} = N\delta_{a0} \tag{A.37}$$

En efecto, el sumatorio tiene un valor en función de a que puede calcularse de la siguiente manera:

- si $a = 0$, entonces $\displaystyle\sum_{l=0}^{N-1} e^{\iota\frac{2\pi a l}{N}} = \sum_{l=0}^{N-1} 1 = N$
- si $a \neq 0$, entonces $\displaystyle\sum_{l=0}^{N-1} e^{\iota\frac{2\pi a l}{N}} = \sum_{l=0}^{N-1}\left(e^{\iota\frac{2\pi a}{N}}\right)^l = \frac{1-e^{\iota 2\pi a}}{1-e^{\iota\frac{2\pi a}{N}}} = 0$

Demostración de la Proposición:

Aplicamos los operadores transformada directa y transformada inversa de forma consecutiva, y hacemos uso del lema anterior:

$$\sum_{k=0}^{N-1}\hat{f}_k e^{\iota\frac{2\pi jk}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\iota\frac{2\pi jk}{N}}\frac{1}{N}\sum_{J=0}^{N-1} f_J e^{-\iota\frac{2\pi Jk}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{J=0}^{N-1} f_J \sum_{k=0}^{N-1} e^{\iota\frac{2\pi(j-J)k}{N}} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{J=0}^{N-1} f_J N\delta_{jJ} = f_j$$

De igual forma:

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-\iota\frac{2\pi jk}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} e^{-\iota\frac{2\pi jk}{N}} \sum_{K=0}^{N-1} \hat{f}_K e^{\iota\frac{2\pi jK}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{K=0}^{N-1} \hat{f}_K \sum_{j=0}^{N-1} e^{\iota\frac{2\pi j(K-k)}{N}} =$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{K=0}^{N-1} \hat{f}_K N\delta_{kK} = \hat{f}_k$$

PROPOSICIÓN 2

a) Si los N valores f_j son todos reales, entonces $\hat{f}_{N-k} = \hat{f}_k^*$

b) Si los N valores f_j son todos imaginarios, entonces $\hat{f}_{N-k} = -\hat{f}_k^*$

Demostración:

$$\hat{f}_{N-k} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-\iota\frac{2\pi j(N-k)}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{\iota\frac{2\pi jk}{N}} e^{-\iota 2\pi j} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{\iota\frac{2\pi jk}{N}} =$$
$$= \left(\pm\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-\iota\frac{2\pi jk}{N}}\right)^* = \pm\hat{f}_k^*$$

donde el signo + se refiere al caso en que los f_j son reales, y el − al caso en que los f_j son imaginarios.

Corolario:

Si los f_j son reales, entonces $\hat{f}_{N/2}$ es real, y si los f_j son imaginarios, entonces $\hat{f}_{N/2}$ es imaginario.

PROPOSICIÓN 3. IDENTIDAD DE PARSEVAL

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left|\hat{f}_k\right|^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N} \left|f_j\right|^2 \tag{A.38}$$

Demostración:

Operando y aplicando (A.37):

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left|\hat{f}_k\right|^2=\sum_{k=0}^{N-1}\hat{f}_k\hat{f}_k^*=\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}f_je^{-\iota\frac{2\pi jk}{N}}\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{J=0}^{N-1}f_Je^{-\iota\frac{2\pi Jk}{N}}\right)^*=$$

$$=\frac{1}{N^2}\sum_{j,J=0}^{N-1}f_jf_J^*\sum_{k=0}^{N-1}e^{\iota\frac{2\pi(J-j)k}{N}}=\frac{1}{N^2}\sum_{j,J=0}^{N-1}f_jf_J^*N\delta_{jJ}=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}f_jf_j^*=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\left|f_j\right|^2$$

La identidad de Parseval enunciada en (A.38) se generaliza inmediatamente para el caso de la transformada de tensores de mayor orden. A modo de ejemplo, para el caso de un tensor de orden tres, de dimensiones N_x, N_y, y N_z escribimos:

$$\sum_{\alpha=0}^{N_x-1}\sum_{\beta=0}^{N_y-1}\sum_{\gamma=0}^{N_z-1}\left|\hat{f}_{\alpha,\beta,\gamma}\right|^2=\frac{1}{N_xN_yN_z}\sum_{p=0}^{N_x-1}\sum_{q=0}^{N_y-1}\sum_{r=0}^{N_z-1}\left|f_{p,q,r}\right|^2 \tag{A.39}$$

APÉNDICE B

MÉTODOS ESPECTRALES PARA LA ECUACIÓN DE POISSON

B.1 ECUACIÓN DE POISSON DISCRETA

Consideremos la ecuación de Poisson:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z} = g \tag{B.1}$$

La resolución de esta ecuación en un dominio cartesiano tridimensional de dimensiones L_x, L_y y L_z se realiza mediante un esquema de diferencias finitas de segundo orden. Para ello, subdividimos L_x, L_y y L_z en N_x, N_y y N_z subintervalos de longitud $\Delta x = L_x/N_x$, $\Delta y = L_y/N_y$ y $\Delta z = L_z/N_z$ respectivamente. La ecuación discretizada resultante es:

$$\frac{f_{p+1,q,r} - 2f_{p,q,r} + f_{p-1,q,r}}{\Delta x^2} + \frac{f_{p,q+1,r} - 2f_{p,q,r} + f_{p,q-1,r}}{\Delta y^2} + \frac{f_{p,q,r+1} - 2f_{p,q,r} + f_{p,q,r-1}}{\Delta z^2} = g_{p,q,r} \tag{B.2}$$

B.2 TRANSFORMADA DE FOURIER

La transformación inversa de Fourier en cada una de las direcciones de los ejes coordenados se expresa, para un conjunto de datos $f_{p,q,r}$, por medio de:

$$f_{p,q,r} = \sum_{\alpha=1}^{N_x-1} \hat{f}^x_{\alpha,q,r} e^{\iota\frac{2\pi p\alpha}{N_x}} \;;\; f_{p,q,r} = \sum_{\beta=1}^{N_y-1} \hat{f}^y_{p,\beta,r} e^{\iota\frac{2\pi q\beta}{N_y}} \;;\; f_{p,q,r} = \sum_{\gamma=1}^{N_z-1} \hat{f}^z_{p,q,\gamma} e^{\iota\frac{2\pi r\gamma}{N_z}} \;; \quad \text{(B.3)}$$

Es posible realizar la transformación en las tres direcciones simultáneamente:

$$f_{p,q,r} = \sum_{\alpha=1}^{N_x-1} \sum_{\beta=1}^{N_y-1} \sum_{\gamma=1}^{N_z-1} \hat{f}^{x,y,z}_{\alpha,\beta,\gamma} e^{\iota\frac{2\pi p\alpha}{N_x}} e^{\iota\frac{2\pi q\beta}{N_y}} e^{\iota\frac{2\pi r\gamma}{N_z}} \quad \text{(B.4)}$$

Aplicando esta transformación a la ecuación de Poisson discretizada (B.2), observamos que el primer término de ésta puede ser escrito mediante:

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^{N_x-1} \sum_{\beta=1}^{N_y-1} \sum_{\gamma=1}^{N_z-1} \hat{f}^{x,y,z}_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{e^{\iota\frac{2\pi(p+1)\alpha}{N_x}} - 2e^{\iota\frac{2\pi p\alpha}{N_x}} + e^{\iota\frac{2\pi(p-1)\alpha}{N_x}}}{\Delta x^2} e^{\iota\frac{2\pi q\beta}{N_y}} e^{\iota\frac{2\pi r\gamma}{N_z}} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N_x-1} \sum_{\beta=1}^{N_y-1} \sum_{\gamma=1}^{N_z-1} \hat{f}^{x,y,z}_{\alpha,\beta,\gamma} \frac{2\cos\frac{2\pi\alpha}{N_x} - 2}{\Delta x^2} e^{\iota\frac{2\pi p\alpha}{N_x}} e^{\iota\frac{2\pi q\beta}{N_y}} e^{\iota\frac{2\pi r\gamma}{N_z}} \end{aligned} \quad \text{(B.5)}$$

De manera completamente análoga podríamos operar con el segundo y tercer términos. Así, finalmente obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{\alpha=1}^{N_x-1} \sum_{\beta=1}^{N_y-1} \sum_{\gamma=1}^{N_z-1} \Bigg\{ \hat{f}^{x,y,z}_{\alpha,\beta,\gamma} \Bigg[&\frac{2}{\Delta x^2}\left(\cos\frac{2\pi\alpha}{N_x} - 1\right) + \frac{2}{\Delta y^2}\left(\cos\frac{2\pi\beta}{N_y} - 1\right) + \\ &+ \frac{2}{\Delta z^2}\left(\cos\frac{2\pi\gamma}{N_z} - 1\right)\Bigg] - \hat{g}^{x,y,z}_{\alpha,\beta,\gamma} \Bigg\} e^{\iota\frac{2\pi p\alpha}{N_x}} e^{\iota\frac{2\pi q\beta}{N_y}} e^{\iota\frac{2\pi r\gamma}{N_z}} \end{aligned}$$

Esta igualdad inmediatamente implica:

$$\hat{f}^{x,y,z}_{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{\hat{g}^{x,y,z}_{\alpha,\beta,\gamma}}{\frac{2}{\Delta x^2}\left(\cos\frac{2\pi\alpha}{N_x} - 1\right) + \frac{2}{\Delta y^2}\left(\cos\frac{2\pi\beta}{N_y} - 1\right) + \frac{2}{\Delta z^2}\left(\cos\frac{2\pi\gamma}{N_z} - 1\right)} \quad \text{(B.6)}$$

B.3 OBTENCIÓN DE LA SOLUCIÓN MEDIANTE SISTEMAS TRIDIAGONALES

El método anteriormente expuesto es altamente eficaz puesto que las tranformadas y antitransformadas de Fourier pueden ser evaluadas mediante la técnica FFT (del inglés, Fast Fourier Tansform) con un coste computacional

muy bajo. Sin embargo, ha sido comprobado (véase por ejemplo, Orlandi [2000], pág 26) que es aún más eficiente no emplear la transformación de Fourier en una de las direcciones y resolver en su lugar un sistema tridiagonal.

Veamos cómo afecta esto al procedimiento anteriormente descrito. Aplicamos ahora la transformación de Fourier en las direcciones x e y a la expresión (B.2), y siguiendo un razonamiento paralelo al utilizado en la sección anterior, obtenemos:

$$\sum_{\alpha=1}^{N_x-1}\sum_{\beta=1}^{N_y-1}\left\{\hat{f}^{x,y}_{\alpha,\beta,r}\left[\frac{2}{\Delta x^2}\left(\cos\frac{2\pi\alpha}{N_x}-1\right)+\frac{2}{\Delta y^2}\left(\cos\frac{2\pi\beta}{N_y}-1\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\hat{f}^{x,y}_{\alpha,\beta,r+1}-2\hat{f}^{x,y}_{\alpha,\beta,r}+\hat{f}^{x,y}_{\alpha,\beta,r-1}}{\Delta z^2}-\hat{g}^{x,y}_{\alpha,\beta,r}\right\}e^{\iota\frac{2\pi p\alpha}{N_x}}e^{\iota\frac{2\pi q\beta}{N_y}}=0$$

lo que lleva a obtener, para cada valor de α y β (α=0,1,…,N_x–1, β=0,1,…,N_y–1), el sistema tridiagonal siguiente para las N_z incógnitas $\hat{f}^{x,y}_{\alpha,\beta,r}$ (r=0,1,…,N_z–1):

$$\hat{f}^{x,y}_{\alpha,\beta,r+1}\frac{1}{\Delta z^2}+\hat{f}^{x,y}_{\alpha,\beta,r}\left[\frac{2}{\Delta x^2}\left(\cos\frac{2\pi\alpha}{N_x}-1\right)+\frac{2}{\Delta y^2}\left(\cos\frac{2\pi\beta}{N_y}-1\right)-\frac{2}{\Delta z^2}\right]+$$
$$+\hat{f}^{x,y}_{\alpha,\beta,r-1}\frac{1}{\Delta z^2}-\hat{g}^{x,y}_{\alpha,\beta,r}=0 \qquad \text{(B.7)}$$

Este sistema ha de ser resuelto utilizando las condiciones de contorno apropiadas. Cuando la función incógnita es la presión, deben aplicarse condiciones de Neumann de modo que $\hat{f}^{x,y}_{\alpha,\beta,-1}=\hat{f}^{x,y}_{\alpha,\beta,0}$ y $\hat{f}^{x,y}_{\alpha,\beta,N_z}=\hat{f}^{x,y}_{\alpha,\beta,N_z-1}$.

Existe además otra ventaja de este procedimiento frente al de realizar una transformación de Fourier en las tres direcciones coordenadas. En efecto, el sistema tridiagonal (B.7) es fácilmente generalizable al caso de un mallado en el que los espaciados internodales no sean uniformes en la dirección de uno de los ejes, pongamos el eje z. El tercer término de la ecuación de Poisson discreta es ahora:

$$\frac{\dfrac{f_{p,j,k+1}-f_{p,j,k}}{\Delta z_{p+\frac{1}{2}}}-\dfrac{f_{p,j,k}-f_{p,j,k-1}}{\Delta z_{p-\frac{1}{2}}}}{\Delta z_p}$$

El sistema tridiagonal resultante, que sustituye a (B.7) es

$$\hat{f}^{x,y}_{\alpha,\beta,r+1}\frac{1}{\Delta z_r \Delta z_{r+\frac{1}{2}}}+\hat{f}^{x,y}_{\alpha,\beta,r}\left[\frac{2}{\Delta x^2}\left(\cos\frac{2\pi\alpha}{N_x}-1\right)+\frac{2}{\Delta y^2}\left(\cos\frac{2\pi\beta}{N_y}-1\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\Delta z_r \Delta z_{r+\frac{1}{2}}}-\frac{1}{\Delta z_r \Delta z_{r-\frac{1}{2}}}\right]+\hat{f}^{x,y}_{\alpha,\beta,r-1}\frac{1}{\Delta z_r \Delta z_{r-\frac{1}{2}}}-\hat{g}^{x,y}_{\alpha,\beta,r}=0 \tag{B.8}$$

Existen algoritmos que resuelven de manera eficaz los sistemas tridiagonales, por lo que este paso es muy poco costoso computacionalmente.

B.4 MÉTODO DE RESOLUCIÓN

El proceso de resolución se puede resumir en los siguientes pasos:

1) Se obtiene la transformada de Fourier del término independiente de la ecuación de Poisson utilizando el algoritmo FFT–forwards:

$$\hat{g}^{x,y}_{\alpha,\beta,r}=\frac{1}{N_x N_y}\sum_{p=0}^{N_x-1}\sum_{q=0}^{N_y-1} g_{p,q,r}e^{-\iota\frac{2\pi p\alpha}{N_x}}e^{-\iota\frac{2\pi q\beta}{N_y}} \tag{B.9}$$

2) Se calcula la transformada de Fourier de la solución resolviendo el sistema tridiagonal dado en (B.7) ó (B.8)

3) Invirtiendo la transformación de Fourier mediante el algoritmo FFT–backwards, se llega finalmente a la solución:

$$f_{p,q,r}=\sum_{\alpha=0}^{N_x-1}\sum_{\beta=0}^{N_y-1}\hat{f}^{x,y}_{\alpha,\beta,r}e^{\iota\frac{2\pi p\alpha}{N_x}}e^{\iota\frac{2\pi q\beta}{N_y}} \tag{B.10}$$

REFERENCIAS

Abramovich, G.N., 1963. **The Theory of Turbulent Jets.** *MIT Press, Cambridge, MA.*

Abramovich, M. y Stegun, I.A., 1965. **Handbook of Mathematical Functions.** *Dover Publications.*

Adams, B.M. y Quarton, D.C., 1996. **Dynamic loads in wind farms II.** *Final Report, Joule Project JOU2-CT92- 0094.*

Ainslie, J.F., 1985. **Development of an eddy viscosity model for wind turbine wakes.** *Proc. 7th BWEA Wind Energy Conf., Oxford,* 61–66.

Ainslie, J.F., 1986. **Wake modelling and the prediction of turbulent properties.** *Proc. 8th BWEA Wind Energy Conf., Cambridge,* 115–119.

Ainslie, J.F., 1988. **Calculating the field in the wake of wind turbines.** *J. Wind Engng. Ind. Aerodyn.,* 27, 213–224.

Ainslie, J.F., Hassan, U., Parkinson, H.G. y Taylor, G.J., 1990. **A wind tunnel investigation of the wake structure within small wind turbine farms.** *Wind Engng.,* 14, 24–28.

Albers, A., Beyer, H.G., Kramkowski, T. y Schild, M., 1993. **Results from a joint wake interference research program.** *Proc. European Community Wind Energy Conf., Travemünde,* 380–382.

Alfredson, P.H., Dahlberg, J.A. y Bark, F.H., 1980. **Some properties of the wake behind horizontal axis wind turbines.** *Proc. 3rd Int. Symp. on Wind Energy Systems, Lyngby,* 469–484.

Ansorge, T., Fallen, M., Günther, P., Ruh, C. y Wolfanger, T., 1994. **Numerical simulation of wake-effects in complex terrain and application of a Reynolds–stress turbulence model.** *Proc. EWEC'94, Thessaloniki,* 448–453.

Baker, R.W. y Walker, S.N., 1985. **Wake velocity deficit measurements at the Goodnoe Hills MOD-2 site.** *Report BPA 84-15, DOE/BP/29182-15.*

Balaras, E., Benocci, C. y Piomelli, U., 1996. **Two–layer aproximate boundary conditions for large–eddy simulations.** *AIAA J.,* 34, 1111–1119.

Bardina, J., Ferziger, J.H. y Reynolds, W.C., 1980. **Improved Subgrid Models for Large–Eddy Simulation.** *AIAA paper*, 80–1357.

Boussinesq, J., 1877 **Essai sur la théorie des eaux courantes.** *Mémoires à l'Académie des Sciences*, T. 23 y 24.

Builtjes, P.J.H., 1978. **The interaction of windmill wakes.** *Proc. 2nd Int. Symp. on Wind Energy Systems, Amsterdam,* 49–58.

Cabot, W.H. y Moin, P., 1999. **Aproximate wall boundary conditions in the large–eddy simulation of high Reynolds number flows.** *Flow Turbul. Combust.,* 63, 269–291.

Cleijne, J.W., 1992. **Results of Sexbierum Wind Farm Report.** *MT-TNO, Apeldoorn*, 92–388.

Cleijne, J.W., Crespo, A., Huberson, S., Taylor, G.J. y Voutsinas, S.G., 1993. **Wake and wind farm modelling.** *Final Report, CEC Contract JOUR-0087-NL, MT-TNO Report 93-374.*

Crespo, A., Manuel, F., Moreno, D., Fraga, E. y Hernández, J., 1985. **Numerical analysis of wind turbine wakes.** *In Bergeles G. and Chadjivassiliadis J. (Eds), Proceedings of the Delphi Workshop on Wind Energy Applications,* 15–25.

Crespo, A., y Hernández, J., 1986. **A numerical model of wind turbine wakes and wind farms.** *Proc. EWEC'86, Rome,* 2, 111–115.

Crespo, A., Hernández, J., Fraga, E. y Andreu, C., 1988. **Experimental validation of the UPM computer code to calculate wind turbine wakes and comparison with other models.** *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics,* 27, 77–88.

Crespo, A. y Hernández, J., 1989. **Numerical modelling of the flow field in a wind turbine wake.** *Proceedings of the 3rd Joint ASCE/ASME Mechanics Conference, Forum on Turbulent Flows, ASME FED*, 76, 121–127.

Crespo, A., Manuel, F. y Hernández, J., 1990. **Numerical modelling of wind turbine wakes.** *Proc. 1990 European Community Wind Energy Conf. Madrid,* 166–170.

Crespo, A. y Hernádez, J., 1991. **Parabolic and elliptic models of wind turbine wakes. Application to the interaction between different wakes and turbines.** *PHOENICS J. Comput. Fluid Dyn.,* 4, 104–127.

Crespo, A. y Hernández, J., 1993. **Analytical correlations for turbulence characteristics in the wakes of wind turbines.** *Proc. European Community Wind Energy Conf. Travemünde,* 436–439.

Crespo, A. y Hernández, J., 1996. **Turbulence characteristics in wind turbine wakes.** *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 61, 71–85.

Crespo, A., Chacón, L., Manuel, F., Gómez–Elvira, R. y Hernádez, J., 1996. **Modelization of offshore wind farms. Effect of the surface roughness of the sea.** *Proc. European Union Wind Energy Conf., Göteborg,* 644–647.

Crespo, A., Hernández, J. y Frandsen, S., 1999. **A survey of modelling methods for wind-turbine wakes and wind farms.** *Wind Energy*, 2, 1–24.

Emeis, S. y Frandsen, S., 1993. **Reduction of horizontal wind speed in a boundary layer with obstacles.** *Boundary Layer Meteorol.,* 64, 297–305.

Faxen, T., 1978. **Wake interaction in any array of wind-mills. Theory and preliminary results.** *Proc. 2nd Int. Symp. on Wind Energy Systems, Amsterdam,* 59–72.

Ferziger, J.H. y Peric, M. 1996. **Computational Methods for Fluid Dynamics.** *Springer– Verlag Berlin Heidelberg, New York.*

Frandsen, S., Chacón, L., Crespo, A., Enevoldsen, P., Gómez-Elvira, R., Hernández, J., Højstrup, J., Manuel, F., Thomsen, K. y Sørensen, P., 1996. **Measurements on and modelling of offshore wind farms.** *Final Report, EU Contract JOU2-CT93-0350, Report Risø-R-903(EN).*

Frandsen, S. y Thögersen, M.L., 1999. **Integrated fatigue loading for wind turbines in wind farms by combining ambient turbulence and wakes.** *Wind Eng.* 23 (6), 327–340.

Frandsen, S., 2003. **Turbulence and turbulence−generated fatigue loading in wind turbine clusters.** *Risø-R-1188(EN), Risø National Laboratory, Roskilde, Dinamarca.*

Germano, M., Piomelli. U., Moin, P. y Cabot, W.H., 1990. **A Dynamic Subgrid−Scale Eddy Viscosity Model.** *Proceedings of Summer Workshop, Center of Turbulence Research, Stanford University, CA.*

Gómez-Elvira, R., 1999. **Aplicación de un modelo algebraico del tensor de Reynolds a la modelización de estelas de aeroturbinas en atmósfera neutra.** *Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Madrid.*

Gómez-Elvira, R., y Crespo, A., 2003. **An explicit algebraic turbulent model to reproduce the anisotropy of the momentum turbulent flows in a wind turbine wake.** *Proceedings of EWEC'2003 Madrid, Spain.*

Gómez-Elvira, R., Crespo, A., Migoya, E., Manuel, F. y Hernández, J., 2005. **Anisotropy of turbulence in wind turbine wakes.** *Journal of Fluids Engineering and Industrial Aerodynamics*, 93, 797−814.

Granados, A.L., 2003. **Flujo turbulento cargado con partículas sólidas en una tubería circular.** *Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Madrid.*

Green, D.R.R., 1986. **Near wake wind tunnel studies.** *ETSU Report WN-S040P1, Loughborough University of Technology, Department of Mechanical Engineering.*

Hassan, U., Taylor, G.J. y Garrad, A.D., 1988. **The dynamic response of wind turbines operating in a wake flow.** *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.* 27, 113−126.

Hassan, U., 1993. **A wind tunnel investigation of the wake structure within small wind farms.** *ETSU Report WN5113.*

Helmis, C.G., Papadopoulos, K.H., Asimakopoulos, D.N., Papageorgas, P.G. y Soilemes, A.T., 1995. **An experimental study of the near-wake structure of a wind turbine operating over complex terrain.** *Solar Energy,* 54 (6), 413−428.

Hernádez, J. y Crespo A., 1990. **Wind turbine wakes in the atmospheric surface layer.** *PHOENICS J. Comput. Fluid Dyn.* 3, 330−361.

Högström, U., Asimakopoulos, D.N., Kambezidis, H., Helmis, C.G., Smedman, A., 1988. **A Field study of the wake behind a 2 MW wind turbine.** *Atmospheric Environment,* 22, 803−820.

Højstrup, J., 1990. **Wake measurements on the Nibe wind−turbines in Denmark, Appendix 1. Nibe wake 2: data report−power spectra.** *Final Report on CEC contract No. EN3W.0039.UK(H1).*

Højstrup, J. y Courtney, M.S., 1993. **Turbulence in Windfarms.** *Proceedings of European Community Wind Energy Conference, Lübeck-Travemünde, Germany,* 383−386.

Højstrup, J., 1999. **Spectral coherence in wind turbine wakes.** *J. Wind. Eng. Ind. Aerodyn.,* 80, 137−146.

International Standard IEC 61400-1 Ed.3, 2005.

Ioveno, M., Passoni, G. y Tordella, D., 2004. **A new large-eddy simulation near-wall treatment.** *Physics of Fluids,* 16, 11, 3935−3944

Kambezidis, H.D., Georgakopoulos, T.P. y Asimakopoulos, D.N., 1990. **Calculation of velocity deficits in the wake of a WECS.** *Proc. European Community Wind Energy Conf., Madrid,* 196−197.

Katic, I., Højstrup, J., y Jensen, N.O., 1986. **A simple model for cluster efficiency.** *Proc. EWEC'86, Rome,* 1, 407−410.

Kim, J. y Moin, P., 1985. **Application of a Fraccional−Step method to Incomprensible Navier−Stokes Equations.** *J. Comp. Physics,* 59, 308−323.

Kiranoudis, C.T., y Maroulis, Z.B., 1997. **Efective short−cut modelling of wind park efficiency.** *Renewable Energy,* 11, 439−457.

Larsen, G.C., Højstrup, J. y Madsen, H.A., 1996. **Wind fields in wakes.** *Proc. European Union Wind Energy Conf., Göteborg,* 764−768.

Larsen, G.C. y Hansen, K.S., 2003. **Spatial coherence of the longitudinal turbulence components.** *Proceedings of European Wind Energy Conference EWEC'2003, Madrid.*

Larsen, G.C., Madsen, H.A. y Sørensen, N.N., 2003. **Mean wake deficit in the near field.** *Proceedings of European Wind Energy Conference EWEC'2003, Madrid.*

Layton, W.J., 2002. **A Mathematical Introduction to Large−Eddy Simulation. Computational Fluid Dynamics−Multiscale Methods.** *Lecture Series at Von Karman Institute for Fluid Dynamics.*

Layton, W.J. y Lewandowski, R., 2003 **A simple and stable scale–similarity model for large–eddy simulation: Energy balance and existence of weak solutions.** *Applied Mathematics Letters,* 16, 8, 1205–1209.

Lesieur, M. y Métais, O., 1996. **New trends in large–eddy simulations of turbulence.** *Annual Review of Fluid Mechanics*, 28, 45–82.

Lesieur, M., 1997. **Turbulence in Fluids.** *Kluwer Academic Publishers.*

Lilly, D.K., 1965. **On the Computational Stability of Numerical Solutions of Time–Dependent, Nonlinear, Geophysical Fluid Dynamics Problems.** *Mon. Wea. Rev.* 93, 11–26.

Lilly, D.K., 1992. **A Proposed Modification of the Germano Subgrid–Scale Closure Method.** *Phys. Fluids A,* 4, 3, 633–635.

Lissaman, P.B.S., 1979. **Energy efectiveness of arbitrary arrays of wind turbines.** *AIAA Paper 79–0114.*

Liu, M., Vocke, M. y Myers, T., 1983. **Mathematical model for the analysis of wind turbine wakes.** *J. Energ.,* 7, 73.

Luken, E. y Vermeulen, P.E.J., 1986. **Development of advanced mathematical models for the calculation of wind turbine wake–interaction efects.** *Proc. EWEC'86, Rome,* 1, 423–427.

Luken, E., Talmon, A. y Vermeulen, P.E.J., 1986. **Evaluation of two mathematical wind turbine wake models in various types of flows.** *MT-TNO Report 86-07, Apeldoorn.*

Lund, T.S., Wu, X. y Squires, K.D., 1998. **Generation of Turbulent Inflow Data for Spatially–Developing Boundary Layer Simulaions.** *Journal of Computational Physics,* 140, 233–258.

Magnusson, M., 1994. **Full-scale wake measurements at Alsvik wind farm, Sweden.** *Proc. EWEC'94, Thessaloniki,* 472–477.

Magnusson, M. y Smedman, A. S., 1994. Influence of atmospheric stability on wind turbine wakes. *Wind Engng.,* 18, 139–152.

Magnusson M., Rados, K. G. y Pothou, K.P., 1996(a). **Wake effects in Alsvik wind park: comparison between measurements and predictions.** *Proc. European Union Wind Energy Conf., Göteborg,* 769–772.

Magnusson, M., Rados, K.G. y Voutsinas, S.G., 1996(b). **A study of the flow downstream of a wind turbine using measurements and simulations.** *Wind Engng.,* 20, 389–403.

Mann, J., 1994. **The spatial structure of neutral atmospheric surface–layer turbulence.** *J. of Fluid Mech.,* 273, 141–168.

Mann, J., 1998. **Wind field simulation.** *Prob. Engng. Mech.* 13 (4), 269–282.

Milborrow, D.J. y Ainslie, J.F., 1992. **Intensified study of wake effects behind single turbines and in wind turbine wakes.** *Final Report of IEA, Annex IX, National Power, London.*

Moeng, C.H., 1984. **A large–eddy simulation model for the study of planetary boundary–layer turbulence.** *Journal of Atmospheric Sciences*, 41, 2052–2062.

Moin, P., 2001. **Fundamentals of engineering numerical analysis.** *Cambridge University Press.*

Morinishi, Y., Lund, T.S., Vasilyev, O.V. y Moin, P., 1998. **Fully Conservative Higher Order Finite Difference Schemes for Incompressible Flow.** *J. Comput. Phys.,* 143, 90–124.

Ol'shanskii, M.A. y Staroverov, V.M., 2000. **On simulation of outflow boundary conditions in finite difference calculations for incompressible fluid.** *Int. J. Numer. Meth. Fluids,* 33, 499–534.

Orlandi, P., 2000. **Fluid Flow Phenomena. A Numerical Toolkit.** *Kluwer Academic Publishers.*

Panofsky, H.A. y Dutton, J.A., 1984. **Atmospheric Turbulence.** *Wiley, New York.*

Patankar, S.V. y Spalding, D.B., 1972. **A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three–dimensional parabolic flows.** *Int. J. Heat Mass Transfer,* 15, 1787–1806.

Papaconstantinou, A., y Bergeles, G., 1988. **Hot–wire measurements of the flow field in the vicinity of a HAWG rotor.** *J. Wind Engng. Ind. Aerodyn.*, 31, 133–146.

Papadopoulos, K.H., Helmis, C.G., Soilemes, A.T., Papageorgas, P.G. y Asimakopoulos, D.N., 1995. **Study of the turbulent characteristics of the near–wake field of a medium–sized wind turbine operating in high wind conditions.** *Solar Energy,* 55 (1), 61–72.

Piacsek, S.A. y Williams, G.P., 1970 **Conservation Properties of Convection Difference Schemes.** *J. Comput. Phys.*, 6, 392–405.

Pierce, C.D. y Moin P., 2001. **Progress-variable approach for Large-Eddy simulation of turbulent combustion.** *Report No. TF-80, Center for Turbulence Research, Stanford University, CA.*

Piomelli, U. y Balaras, E., 2002. **Wall–Layer Models for Large–Eddy Simulations.** *Annual Review of Fluid Mechanics*, 34, 349–374.

Prandtl, L. 1952. **Guide a travers la Mécanique des Fluides.** *Dunod.*

Quarton D.C., 1989. **Characterization of wind turbine wake turbulence and its implications on wind farm spacing.** *Final Report ETSU WN 5096, Department of Energy of the UK, Garrad-Hassan Contract.*

Schlichting, H., 1968. **Boundary Layer Theory.** *McGraw-Hill, New York.*

Senocak, I.; Ackerman, A.S.; Kirkpatrik, M.P.; Stevens, D.E. y Mansour, N.N., 2004. **Study of near–surface models in large–eddy simulations of neutrally stratified atmospheric boundary layer.** *Annual Research Briefs 2004, Center for Turbulence Research, Stanford University, CA.*

Sforza, P.M., Stasi, W., Smorto, M. y Sheering P., 1979. **Wind turbine generator wakes.** *AIAA Paper 79–1113.*

Sforza, P.M., Sheering, P. y Smorto, M., 1981. **Three–dimensional wakes of simulated wind turbines.** *AIAA J.,* 19, 1101–1107.

Smagorinsky, J., 1963. **General Circulation Experiments with de Primitive Equations. Part I: The basic experiment.** *Mon. Wea. Rev.* 91, 99–164.

Smith, D., 1990. **Multiple wake measurements and analysis.** *Davies TD, Halliday JA, Palutikov JP, editors. Proceedings of the 12th BWEA Wind Energy Conference, Norwich, UK,* 53–6.

Smith, D. y Taylor G.J., 1991. **Further analysis of turbine wake development and interaction data.** *Proceedings of the 13th BWEA Wind Energy Conference, Swansea, UK,* 325–331.

Talmon, A.M., 1985. **The wake of a HAWT model.** *MT- TNO report 85–010121.*

Taylor, P.A., 1980. **On wake decay and row spacing for WECS farms.** *Proc. 3rd Int. Symp. on Wind Energy Systems, Lyngby,* 451–468.

Taylor, G.J., Milborrow, D.J., McIntosh, D.N. y Swift-Hook, D.T., 1985. **Wake measurements on the Nibe windmills.** *Proc. 7th BWEA Wind Energy Conf., Oxford,* 67–73.

Taylor, G.J., 1987. **Fluctuating loads on a wind turbine operating in a wake.** *Proceedings 9th BWEA Wind Energy Conference, Edinburgh,* 55–62.

Taylor, G.J., 1990. **Wake measurements on the Nibe wind–turbines in Denmark. Part 2: Data collection and analysis.** *Final Report, CEC Contract EN3W.0039.UK(H1), National Power, London.*

Taylor, G.J., 1993. **Development of an improved eddy viscosity model. Wake and wind farm modelling.** *Contribution to Final Report, CEC Contract JOUR-0087-NL (CEC). MT-TNO Report,* 93–374.

Tindal, A.J., 1993. **Dynamic loads in wind farms.** *Final Report, CEC Project JOUR-0084-C.*

Troldborg, N., Sørensen, J.N. y Mikkelsen, R., 2007. **Actuator Line Simulation of Wake of Wind Turbine Operating in Turbulent Inflow.** *Journal of Physics: Conference Series*, 75, 012063.

Van Driest, E.R., 1956. **On Turbulence Flow Near a Wall.** *Journal of Aerospace Science,* 23, 1007–1011.

Vermeer, L.J., Sørensen, J.N. y Crespo, A., 2003. **Wind turbine wake aerodynamics.** *Prog. Aero Space Sci.* 6–7, 467–510.

Vermeulen, P.E.J., 1980. **An experimental analysis of wind turbine wakes.** *Proc. 3rd Int. Symp. on Wind Energy Systems, Lyngby,* 431–450.

Vermeulen, P.E.J. y Builtjes, P.J.H., 1982. **Practical applications of mathematical wake interaction model.** *Proc. 4th Int. Symp. on Wind Energy Systems, Stockholm,* 2, 437–448.

Voutsinas, S.G., Rados, K.G. y Zervos, A., 1990. **On the analysis of wake efects in wind parks.** *Wind Engng.,* 14, 204–219.

Voutsinas, S.G., Glekas, J.P. y Zervos, A., 1992(a). **Investigation of the effect of the initial velocity profile on the wake development of a wind turbine.** *J. Wind Engng. Ind. Aerodyn.,* 39, 293–301.

Voutsinas, S.G., Rados, K.G. y Zervos, A., 1992(b). **On the effect of the rotor geometry on the formation and the development of its wake.** *J. Wind Engng. Ind. Aerodyn.,* 39, 283–291.

Voutsinas, S.G., Rados, K. G. y Zervos, A., 1993. **Wake effects in wind parks. A new modelling approach.** *Proc. 1993 European Community Wind Energy Conf., Travemünde,* 444–447.

Wall, D., Pierce, C.D. y Moin, P., 2002. **A Semi–implicit Method for Resolution of Acoustic Waves in Low Mach Number Flows.** *Journal of Computational Physics,* 181, 545–563.

Whale, J., Papadopoulos, K.H., Anderson, C.G., Helmis, C.G. y Skyner, D.J., 1996. **Study of the near wake structure of a wind turbine comparing measurements from laboratory and full–scale experiments.** *Solar Energy,* 56 (6), 621–633.

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos latinos:

a	Factor de velocidad inducida / Constante en el modelo de coherencia espacial de Panofky y Dutton
a_{ij}	Componentes del tensor de amplitud
a_k, b_k	Coeficientes del desarrollo en serie de Fourier
A	Área frontal de las celdas que constituyen el rótor de la turbina
A^+	Constante de la corrección de Van Driest
c_k	Coeficientes del desarrollo en serie alternativo de Fourier
c_p	Pesos para la interpolación lineal en mallas no uniformes
c_1, c_2	Constantes de la correlación de Frandsen
C_D	Constante en la expresión de Moeng para las componentes del esfuerzo cortante en el plano inferior del recinto de cálculo
C_S	Constante de Smagorinski
C_K	Constante de Kolmogorov
C_T	Coeficiente de empuje de la aeroturbina
$\mathrm{Co}_{u_1,u_2}(\omega)$	Coespectro entre las series temporales u_1 y u_2
$\mathrm{Co}_{u_1,u_2;T}(\omega)$	Coespectro entre las series temporales u_1 y u_2, de extensión finita T
$\mathrm{Co}_{u_1,u_2;k}$	Valores del coespectro entre las serie temporales discretas u_1 y u_2
d	Distancia del primer nodo de la malla al suelo
D	Diámetro de la turbina

f	Frecuencia absoluta (Hz)
$\hat{f}(\omega)$	Trasformada de Fourier de la función f
$\hat{f}_c(\omega)$	Trasformada del coseno de la función f
$\hat{f}_s(\omega)$	Trasformada del seno de la función f
$\hat{f}_k$	Valores de la trasformada de Fourier discreta de la serie f_j
$\hat{f}_{\alpha,\beta,\gamma}$	Valores de la trasformada de Fourier discreta del tensor de tercer orden $f_{p,q,r}$
$\hat{f}^x_{\alpha,q,r}$, $\hat{f}^y_{p,\beta,r}$, $\hat{f}^z_{p,q,\gamma}$	Valores de las trasformadas de Fourier discreta en dirección x, dirección y y dirección z respectivamente del campo tridimensional $f_{p,q,r}$
$\hat{f}^{x,y}_{\alpha,\beta,r}$	Valores de la trasformada de Fourier discreta en las direcciones x e y del campo tridimensional $f_{p,q,r}$
$\hat{f}^{x,y,z}_{\alpha,\beta,\gamma}$	Valores de la trasformada de Fourier discreta en las direcciones x, y y z del campo tridimensional $f_{p,q,r}$
f_x	Fuerza por unidad de volumen ejercida sobre las celdas que constituyen el rótor de la turbina
f^+, f^-	Partes par e impar de la función f
F	Fuerza total ejercida por el viento sobre la turbina
G_Δ	Función filtro de ancho Δ
h	Altura del buje de la turbina
$h(\Omega)$	Función de alisado
i, j	Subíndices indicativos de las componentes de un vector o tensor / Subíndices utilizados para representar los varios valores de una serie temporal discreta
I_x, I_y, I_z	Intensidades de turbulencia en las tres direcciones coordenadas
I_0	Intensidad de turbulencia longitudinal ambiente
$\mathbf{J}_f$	Matriz jacobiana de la función f
$\mathbf{k}$	Vector de onda
k	Número de onda / Energía cinética turbulenta / Número de iteración en el esquema semi−implícito iterativo / Subíndice

	utilizado para representar los varios valores de la transformada discreta de Fourier de una serie.
k_i	Componente i–ésima del vector de onda
k_c	Número de onda de corte
k'	Número de onda modificado / Energía cinética turbulenta de subescala
l	Distancia aguas debajo de la turbina
L	Longitud de escala de la turbulencia
L_c	Parámetro de escala de la coherencia espacial
L_{ij}	Componentes del tensor de Leonard
L_x, L_y, L_z	Dimensiones del dominio de cálculo
m	Número de dimensiones en la transformación de Fourier / Número total de iteraciones en el esquema semi–implícito iterativo
M_{ij}	Componentes del tensor de traza nula introducido para el cálculo dinámico de la viscosidad turbulenta
n	Posición nodal en la malla temporal
N	Número de datos de una serie temporal discreta
N_x, N_y, N_z	Número de nodos de la malla en cada dirección coordenada
p	Presión
p, q, r	Subíndices que denotan las posiciones nodales en la malla en las tres direcciones coordenadas
P	Presión reducida
P^0	Opuesto de las componentes diagonales de la parte de traza no nula del tensor de esfuerzos de subescala
P^*	Pseudopresión o presión modificada
$\mathrm{Qu}_{u_1,u_2}(\omega)$	Espectro de cuadratura entre las series temporales u_1 y u_2
$\mathrm{Qu}_{u_1,u_2;T}(\omega)$	Espectro de cuadratura entre las series temporales u_1 y u_2, de extensión finita T
$\mathrm{Qu}_{u_1,u_2;k}$	Valores del espectro de cuadratura entre las serie temporales discretas u_1 y u_2
$\mathbf{r}$	Vector de posición
R_{ij}	Correlaciones de las componentes de la velocidad

$R_u(\tau)$	Función de autocorrelación de la serie temporal u
$R_{u;T}(\tau)$	Función de autocorrelación de la serie temporal u, de extensión finita T
$R_{u;j}$	Valores de la función de autocorrelación de la serie temporal discreta u
$R_{u_1,u_2}(\tau)$	Función de covarianza entre las series temporales u_1 y u_2
$R_{u_1,u_2;T}(\tau)$	Función de covarianza entre las series temporales u_1 y u_2, de extensión finita T
$R_{u_1,u_2;j}$	Valores de la función de covarianza entre las serie temporales discretas u_1 y u_2
s	Separación entre los dos puntos entre los que se estudia la coherencia espacial
$\mathbf{S}$	Tensor de deformación
$\lVert\mathbf{S}\rVert$	Norma del tensor de deformación
S_{ij}	Componentes del tensor de deformación
$S_u(f)$	Densidad espectral de energía para la serie temporal u
$S_{u;T}(f)$	Densidad espectral de energía para la serie temporal u, de extensión finita T
$S_{u;k}$	Valores de la densidad espectral de energía espectral para la serie temporal discreta u
t	Instante temporal
T	Duración de una serie temporal finita
$u(t)$	Serie temporal continua e infinita
$u_T(t)$	Serie temporal continua y de extensión finita T
u_i	Valores de la serie temporal discreta u
u_*	Velocidad de fricción
U	Potencial de fuerzas másicas / Velocidad del viento de referencia para el cálculo de la coherencia espacial
$\mathbf{v}$	Vector velocidad
v_i	Componente i–ésima de la velocidad
u, v, w	Primera, segunda y tercera componentes de la velocidad

v', V	Velocidades características de subescala y de las escalas resueltas
$\widehat{\mathbf{v}}$	Estimación no solenoidal del campo de velocidades
$\dot{v}_i(z)$	Secuencia de números aleatorios para la i–ésima componente
$v_h(x,z)$	Componente horizontal de la velocidad en el primer nodo de la malla
V_i	Valor medio de la componente i–ésima de la velocidad
V_0	Velocidad media del viento a la altura del buje de la turbina
Δv	Máximo defecto de velocidad en la estela
x_i	Coordenada i–ésima
x, y, z	Primera, segunda y tercera coordenadas
y^+	Distancia al suelo en unidades de pared
y_0	Rugosidad de la superficie

Símbolos griegos:

α, β, γ	Subíndices que denotan la posición nodal en el dominio de Fourier
δ_{ij}	Delta de Kronecker
Δ	Anchura vectorial de filtrado
Δx, Δy, Δz	Espaciados de malla en la primera, segunda y tercera direcciones coordenadas
ε	Tasa de disipación de la energía cinética turbulenta
$\Phi_u(\omega)$	Densidad espectral de energía para la serie temporal u
$\Phi_{u;T}(\omega)$	Densidad espectral de energía para la serie temporal u, de extensión finita T
$\Phi_{u;k}$	Valores de energía espectral para la serie temporal discreta u
$\tilde{\Phi}_{u;T}(\omega)$	Densidad espectral de energía alisada para la serie temporal u, de extensión finita T
$\tilde{\Phi}_{u;j}$	Valores de energía espectral alisada para la serie temporal discreta u
$\Gamma_{u_1,u_2}(\omega)$	Coherencia espectral entre las series temporales u_1 y u_2
$\Gamma_{u_1,u_2;T}(\omega)$	Coherencia espectral entre las series temporales u_1 y u_2, de extensión finita T

$\Gamma_{u_1,u_2;k}$	Valores de la coherencia espectral entre las serie temporales discretas u_1 y u_2
ι	Unidad imaginaria
$\overline{\varphi}$	Campo φ filtrado
φ'	Fluctuaciones de subescala del campo φ
$\langle\varphi\rangle$	Esperanza estadística del campo φ
φ'	Oscilaciones del campo φ respecto a su valor medio estadístico
$(\varphi)_{x_i}$	Operador de interpolación sobre φ en la dirección coordenada x_i
$\delta_{x_i}(\varphi)$	Operador de diferenciación sobre φ en la dirección coordenada x_i
$F_{x_i}(\varphi)$	Operador de filtrado sobre φ en la dirección coordenada x_i
$\underline{\varphi\xi}_{x_i}$	Operador de interpolación sobre φ y ξ no lineal en la dirección coordenada x_i
κ	Constante de von Karman
λ	Autovalores de un esquema de discretización
$\Lambda_{u_1,u_2}(\omega)$	Espectro cruzado entre las series temporales u_1 y u_2
$\Lambda_{u_1,u_2;T}(\omega)$	Espectro cruzado entre las series temporales u_1 y u_2, de extensión finita T
$\Lambda_{u_1,u_2;k}$	Valores del espectro cruzado entre las serie temporales discretas u_1 y u_2
$\tilde{\Lambda}_{u_1,u_2;T}(\omega)$	Espectro cruzado alisado entre las series temporales u_1 y u_2, de extensión finita T
$\tilde{\Lambda}_{u_1,u_2;k}$	Valores del espectro cruzado alisado entre las serie temporales discretas u_1 y u_2
ν	Viscosidad cinemática molecular
ν_T	Viscosidad cinemática turbulenta
$\nu_{\max}$	Viscosidad turbulenta máxima admisible en un modelo de subescala dinámico
ν_{tot}	Viscosidad total
ν_1, ν_2	Parámetros de los modelos de viscosidad turbulenta avanzados
$\theta_{u_1,u_2}(\omega)$	Fase del espectro cruzado entre las series temporales u_1 y u_2

$\theta_{u_1,u_2;T}(\omega)$	Fase del espectro cruzado entre las series temporales u_1 y u_2, de extensión finita T
$\theta_{u_1,u_2;k}$	Valores de la fase del espectro cruzado entre las serie temporales discretas u_1 y u_2
ρ	Densidad
σ_u	Desviación típica de la serie temporal u
σ_0	Desviación típica de la dirección del viento
$\tau_{ij}^{(SGS)}$	Componentes del tensor de esfuerzos de subescala
τ_{ij}^{0}	Componentes de la parte de traza nula del tensor de esfuerzos de subescala
$\tau_{ij}^{(Re)}$	Componentes del tensor de esfuerzos resueltos o de Reynolds
$\tau_{ij}^{(visc)}$	Componentes del tensor de esfuerzos viscosos
τ_0	Esfuerzo cortante medio sobre el suelo
$\tau_{iy}(x,z)$	Componentes del esfuerzo cortante en el plano inferior del recinto de cálculo
$\tau(x,z)$	Modulo del esfuerzo cortante en el plano inferior del recinto de cálculo
τ	Desfase temporal entre dos señales
ω	Frecuencia angular (rad/s)
ω_k	Valores discretos de la frecuencia angular

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1. Representación esquemática de una estela de aeroturbina.....6

Figura 3.1. Malla con escalonamiento espacial y temporal.....38

Figura 3.2. Diagrama de número de onda modificado para diferencias centradas de segundo orden, con mallas escalonadas y no escalonadas.....39

Figura 3.3. Regiones de estabilidad lineal para 1, 2, 3, 4 e infinitas iteraciones. Se muestra también la de Runge-Kutta de tercer orden, a efectos comparativos.....48

Figura 4.1. Vista esquemática del dominio de cálculo.....52

Figura 4.2. Representación esquemática del modelo de aeroturbina.....60

Figura 5.1. Posición relativa de la turbina, los mástiles y los anemómetros.....65

Figura 5.2. Flujo imperturbado sobre la turbina. Perfil de velocidad y ley logarítmica de la pared.....66

Figura 5.3. Comparación de los perfiles de las componentes del tensor de esfuerzos de Reynolds con los medidos en Sexbierum Wind Farm.....67

Figura 5.4 Perfil de viscosidad cinemática turbulenta adimensionalizada del flujo incidente.....68

Figura 5.5. Secuencia de tres contornos de magnitud de velocidad instantánea adimensionalizada $|\mathbf{v}|/V_0$ en tres diferentes instantes separados un cierto intervalo temporal. Corte en un plano horizontal a la altura del buje.....69

Figura 5.6. Contornos de velocidad media $<v_x>/V_0$. Corte en un plano horizontal a la altura del buje.....70

Figura 5.7. Contornos de magnitud de velocidad $|\mathbf{v}|/V_0$ y vectores de velocidad $\mathbf{v}/V_0$ en la estela. Corte por un plano vertical que contiene el eje de la turbina.....71

Figura 5.8. Contornos de magnitudes fluidas adimensionalizadas en un plano horizontal a la altura del buje. (a) Viscosidad turbulenta ν_T/hV_0. (b) Energía cinética turbulenta k/V_0^2. (c) Presión $P/0{,}5\rho V_0^2$..... 72

Figura 5.9. Contornos de magnitudes fluidas adimensionalizadas en un plano vertical que contiene el eje del rótor de la turbina. (a) Velocidad media $<v_x>/V_0$. (b) Viscosidad turbulenta ν_T/hV_0. (c) Energía cinética turbulenta k/V_0^2.....73

Figura 5.10. Contornos de vorticidad adimensionalizada. (a) Representación de la componente $\omega_y h/V_0$ en un plano horizontal que contiene el eje de la turbina. (b) Representación de la componente $\omega_z h/V_0$ en un plano vertical que contiene el eje de la turbina..... 74

Figura 5.11. Razón de la velocidad del viento $<v_x>/V_0$ en un plano horizontal a la altura del buje, a distancias de la turbina de 2,5D, 5,5D y 8D..... 75

Figura 5.12. Intensidad de turbulencia longitudinal $<v_x'^2>^{1/2}/V_0$ y vertical $<v_y'^2>^{1/2}/V_0$, en un plano horizontal a la altura del buje a distancia de la turbina de 2,5D..... 76

Figura 5.13. Intensidad de turbulencia longitudinal $<v_x'^2>^{1/2}/V_0$, a diferentes alturas próximas a la parte superior, buje y parte inferior del rotor de la turbina.....77

Figura 5.14. Intensidad de turbulencia longitudinal $<v_x'^2>^{1/2}/V_0$, en un plano horizontal a la altura del buje, a distancias de la turbina de 2,5D, 5,5D y 8D..... 78

Figura 5.15. Correlación adimensional $<v_x'v_z'>/V_0^2$, en un plano horizontal a la altura del buje a distancia de la turbina de 2,5D..... 79

Figura 5.16. Correlación adimensional $<v_x'v_y'>/V_0^2$, en un plano horizontal a la altura del buje a distancia de la turbina de 2,5D..... 80

Figura 5.17. Variación de la velocidad en la estela $<v_x>/V_0$ con la distancia al suelo. 81

Figura 5.18. Variación de la intensidad de turbulencia longitudinal $<v_x'^2>^{1/2}/V_0$ con la distancia al suelo..... 82

Figura 5.19. Valor máximo de la intensidad de turbulencia longitudinal añadida..... 85

Figura 5.20. Valor máximo de las intensidades de turbulencia transversal y vertical añadidas.....86

Figura 5.21. Correlaciones para la variación de la intensidad de turbulencia longitudinal añadida en la estela. Datos experimentales con velocidades en el rango 9 m/s $< V_0 <$ 11 m/s. Para los cálculos LES se ha asumido $C_T = 0{,}7$.....88

Figura 6.1. Configuración del parque eólico Nørrekær Enge II Windfarm. Posición relativa de turbinas y mástiles..... 101

Figura 6.2. Posición relativa de los anemómetro montados en el mástil M2..... 102

Figura 6.3. Curvas de potencia y coeficiente de empuje para la turbina Nordtank 300 kW..... 104

Figura 6.4. Densidad espectral de energía para $U = 7$ m/s y $h = 31$ m en los casos sin estela, estela $2D$ y estela 7,5D..... 105

Figura 6.5. Densidad espectral de energía para $U = 7$ m/s y $h = 44$ m en los casos sin estela, estela $2D$ y estela 7,5D..... 106

Figura 6.6. Densidad espectral de energía para $U = 9$ m/s y $h = 31$ m en los casos sin estela, estela $2D$ y estela 7,5D..... 107

Figura 6.7. Densidad espectral de energía para $U = 9$ m/s y $h = 44$ m en los casos sin estela, estela $2D$ y estela 7,5D..... 108

Figura 6.8. Densidad espectral de energía para $U = 11{,}5$ m/s y $h = 31$ m en los casos sin estela, estela $2D$ y estela 7,5D..... 109

Figura 6.9. Densidad espectral de energía para $U = 11{,}5$ m/s y $h = 44$ m en los casos sin estela, estela $2D$ y estela 7,5D..... 110

Figura 6.10. Coherencia lateral para $U = 7$ m/s y $h = 31$ m. Modelos analíticos, cálculos LES y resultados experimentales..... 113

Figura 6.11. Coherencia lateral para $U = 7$ m/s y $h = 44$. Modelos analíticos, cálculos LES y resultados experimentales..... 114

Figura 6.12. Coherencia lateral para $U = 9$ m/s y $h = 31$ m. Modelos analíticos, cálculos LES y resultados experimentales..... 115

Figura 6.13. Coherencia lateral para $U = 9$ m/s y $h = 44$ m. Modelos analíticos, cálculos LES y resultados experimentales..... 116

Figura 6.14. Coherencia lateral para U = 11,5 m/s y h = 31 m. Modelos analíticos, cálculos LES y resultados experimentales..... 117

Figura 6.15. Coherencia lateral para $U = 11{,}5$ m/s y $h = 44$ m. Modelos analíticos, cálculos LES y resultados experimentales..... 118

Figura 6.16. Coherencia vertical para $U = 7$ m/s. Modelos analíticos, cálculos LES y resultados experimentales..... 119

Figura 6.17. Coherencia vertical para $U = 9$ m/s. Modelos analíticos, cálculos LES y resultados experimentales..... 120

Figura 6.18. Coherencia vertical para $U = 11{,}5$ m/s. Modelos analíticos, cálculos LES y resultados experimentales..... 121