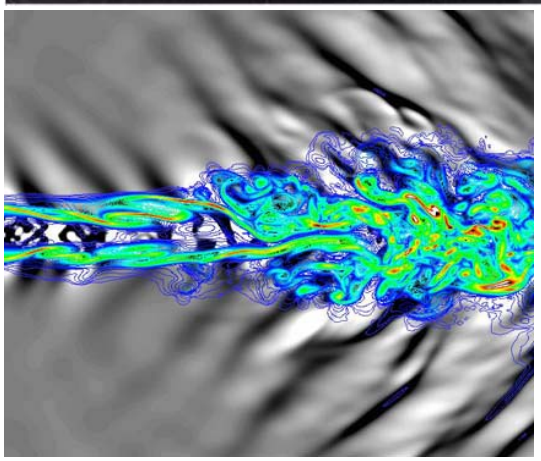
Universidad de Oviedo
Área de Mecánica de Fluidos

TURBULENCIA

Chorro turbulento



Simulación Numérica Directa (DNS) de un chorro (Mach 1.92)

Rafael Ballesteros Tajadura
Curso 2004-2005

1. INTRODUCCIÓN

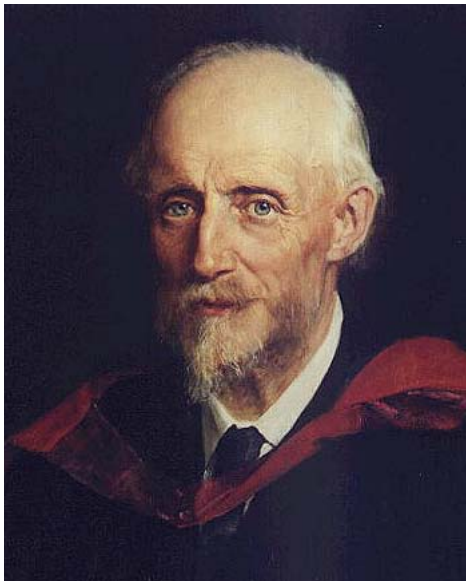
Los movimientos turbulentos son muy comunes, tanto en la naturaleza (flujos atmosféricos, ríos,...) como en diferentes aplicaciones de interés tecnológico (flujos en conductos, turbomaquinaria, calderas, cámaras de combustión, equipos de intercambio de calor, aerodinámica de vehículos,...), hasta el punto de que la mayor parte de los flujos de interés tecnológico son turbulentos. La turbulencia modifica significativamente parámetros tales como la resistencia a la fricción, la transmisión de calor o la capacidad de mezcla, es necesario su comprensión y su caracterización.

No existe una teoría completa del fenómeno ni parece que por el momento se vaya a establecer. De todas formas, durante la segunda mitad del siglo XX se ha llegado a caracterizar el movimiento turbulento mediante el uso de diversos métodos: *visualización de flujos, desarrollo de instrumentación adecuada y resolución numérica de las ecuaciones de constitución*. Con el uso combinado de estos métodos se han llegado a perfeccionar modelos parciales que permiten abordar flujos turbulentos, incluso en geometrías complejas.

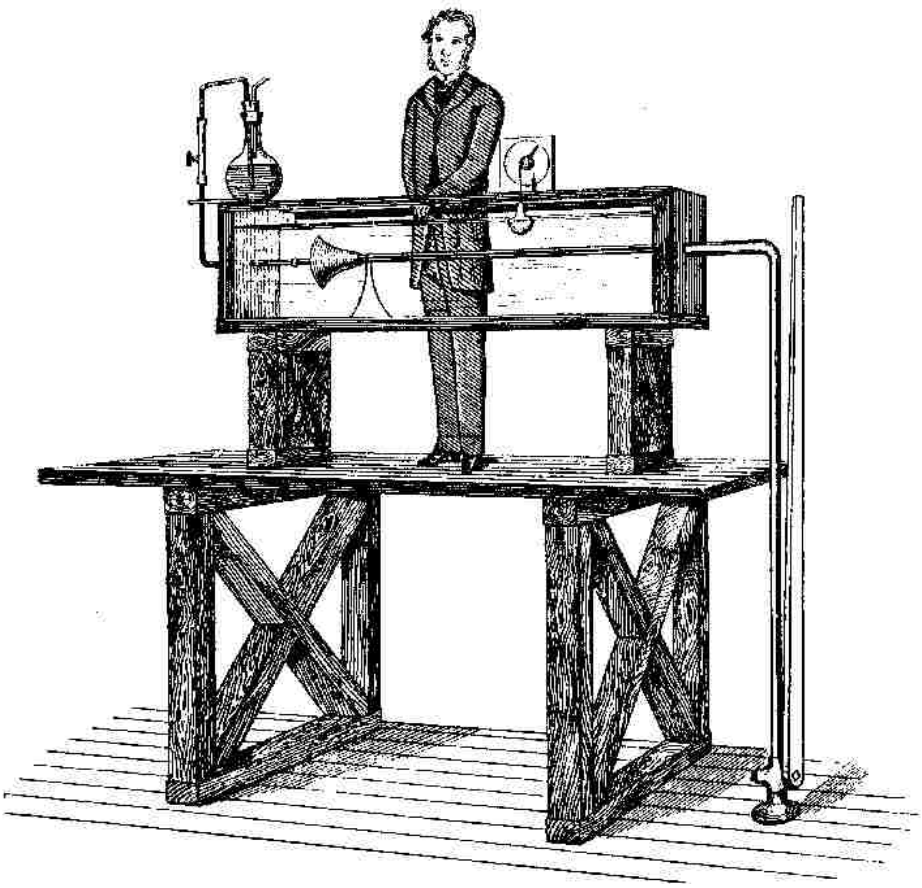
El principal **objetivo** de este tema es la descripción del fenómeno de la turbulencia, su efecto en los flujos y su modelado. Finalmente, se describirán brevemente dos técnicas de medida que permiten caracterizar la turbulencia.

2. NATURALEZA Y CARACTERÍSTICAS DE LA TURBULENCIA

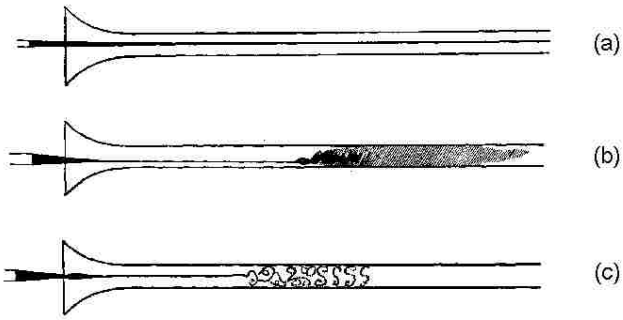
2.1. EXPERIMENTO DE REYNOLDS



En 1883 **Osborne REYNOLDS (1842-1912)** realizó un experimento que sirvió para poner en evidencia las diferencias entre *flujo laminar* y *flujo turbulento*. Este experimento consiste en inyectar colorante en un líquido que circula por un largo tubo de sección circular constante. Para esta geometría ya se ha obtenido una solución analítica de la distribución de velocidad y de la relación de las pérdidas de carga con el caudal (ecuación de Hagen-Poiseuille). Este movimiento se caracteriza por ser permanente y porque las líneas de corriente son paralelas a las paredes del tubo. Sin embargo, Reynolds observó que dicho movimiento sólo existe si la velocidad del flujo es suficientemente pequeña o el diámetro del tubo es suficientemente pequeño para un caudal dado. Bajo estas circunstancias, el colorante forma una línea de corriente bien definida cuyo contorno muestra que sólo existe una pequeña difusión en la dirección radial, debida al transporte molecular.



Esquema del Tanque de Reynolds



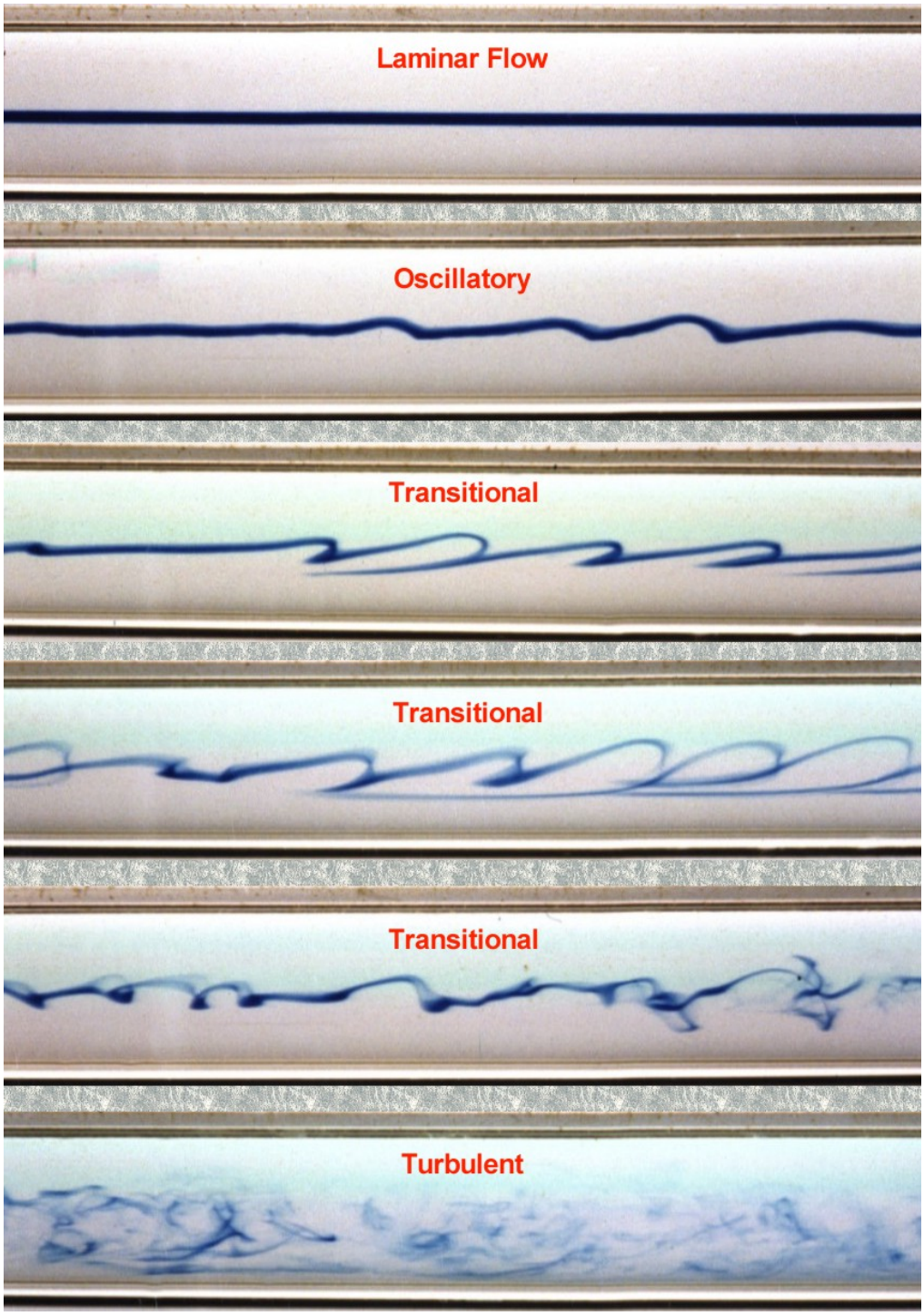
Diferentes tipos de flujos en el conducto

Fotografía del Tanque de Reynolds

Además, cualquier perturbación que aparece en el flujo es amortiguada rápidamente. Este movimiento es el denominado ***laminar***. Sin embargo, si la velocidad es suficientemente grande o el diámetro del tubo es suficientemente grande, el movimiento del fluido se hace muy sensible a cualquier perturbación, que se puede amplificar rápidamente. El flujo se hace entonces irregular y pierde su carácter estacionario. El grosor del colorante crece rápidamente, el contorno se difumina y toma forma irregular hasta que aguas abajo, se convierte en una nube. Este movimiento es el denominado ***turbulento***.

La mayor contribución de Reynolds fue el descubrimiento de que la existencia de uno u otro tipo de flujo depende del valor que tomase una agrupación adimensional de variables relevantes del flujo: $\frac{v\,D}{\nu}$ siendo '**v**' la

velocidad media del flujo (caudal/área transversal del conducto), '**D**' el diámetro y '**ν**' la viscosidad cinemática del fluido. En todos los flujos existe un valor de este parámetro, denominado en su honor ***número de Reynolds*** para el cual se produce la transición de flujo laminar a flujo turbulento, habitualmente denominado *número de Reynolds crítico*.



Fotografías de los diversos regímenes de flujo en el Tanque de Reynolds

2.2. CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LOS FLUJOS TURBULENTOS

Aunque no sea fácil definir exactamente la turbulencia, existe una noción intuitiva de lo que es, y se podría describir como un movimiento fluctuante y desordenado, siendo más fácil distinguirlo de un movimiento laminar (el término 'turbulento' forma parte del lenguaje cotidiano, asociado a desorden):

-humo de un cigarrillo

-chorro de un grifo

-vuelo en un avión

-estelas de objetos sumergidos

-...

Definición de flujo turbulento: ante la dificultad de una definición precisa de la turbulencia, se opta por la enumeración de las propiedades más destacables de los movimientos turbulentos. Hay que tener en cuenta que *la turbulencia no es una propiedad del fluido, sino del flujo*:

Irregularidad. Es la característica más fácilmente apreciable para cualquier observador. La irregularidad se manifiesta en la aparición de fluctuaciones de las variables fluidodinámicas (velocidad, presión, temperatura, concentración) con tamaños y tiempos muy dispares (diferentes escalas). Se producen fluctuaciones no estacionarias en flujos inicialmente estacionarios. A pesar de ser un fenómeno determinista, los flujos turbulentos parecen caóticos e impredecibles, lo que justifica el uso de métodos estadísticos para su estudio.

Tridimensionalidad. Pueden existir flujos turbulentos que, al ser promediados en el tiempo, resulten ser bidimensionales (planos). Incluso pueden existir movimientos turbulentos en los que las escalas más grandes de la turbulencia sean fundamentalmente bidimensionales. Sin embargo, a medida que se desciende en el tamaño de las escalas dentro del amplio espectro que caracteriza a la turbulencia, se encuentra que el movimiento asociado a estas escalas pequeñas es siempre tridimensional.

Difusividad ('mixing'). Los fenómenos de transporte de masa, cantidad de movimiento y energía se ven notablemente amplificados por efecto de la turbulencia. Esto se debe a las fluctuaciones del movimiento turbulento. Si bien estas fluctuaciones tienen lugar a escalas mucho mayores que la escala molecular, producen, efectos difusivos semejantes a los de carácter molecular (al menos cualitativamente).

Disipación. Los flujos turbulentos son siempre disipativos. Una vez que se ha desarrollado el flujo turbulento, la turbulencia tiende a mantenerse, aunque para ello necesite de un aporte continuo de energía. Esta energía se extrae del flujo principal y la invierte en aumentar la energía interna mediante procesos de deformación a los que se ven sometidas las partículas fluidas. La turbulencia necesita de una transferencia continua de energía para reponer esas pérdidas viscosas. Si no existe suministro de energía, la turbulencia decae rápidamente.

Altos números de Reynolds. La turbulencia se origina frecuentemente como una inestabilidad de flujos laminares. Del análisis de la estabilidad de soluciones de flujos laminares, se evidencia que la solución se hace inestable

a partir de un cierto valor del número de Reynolds, o valor crítico. Sin embargo, el valor efectivo de dicho número depende del tipo de aplicación.

En definitiva, la turbulencia es un fenómeno complejo, gobernado por las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos para un medio continuo: incluso las escalas más pequeñas que aparecen en un flujo turbulento están muy lejos de las escalas de longitud molecular, por lo que su solución analítica resulta inviable. La dinámica de la turbulencia es la misma en todos los fluidos, sean líquidos o gases, si el número de Reynolds es suficientemente grande. Debido a que las ecuaciones del movimiento son no lineales, cada tipo de flujo posee ciertas características singulares que van asociadas a sus condiciones iniciales y de contorno.

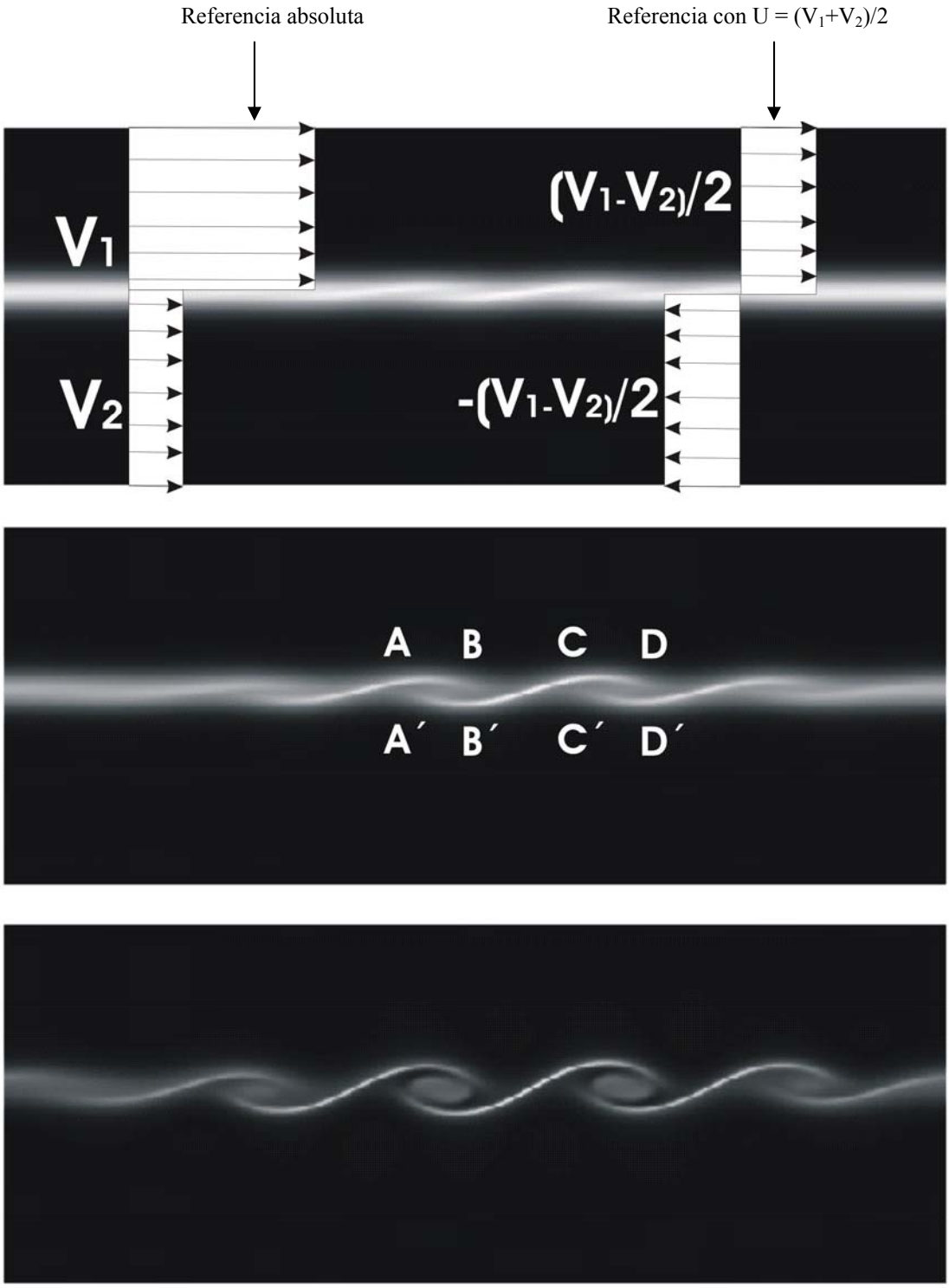
3. ORIGEN DE LA TURBULENCIA: INESTABILIDADES

Para que un fenómeno físico ocurra de forma continua en el espacio y en el tiempo, no es suficiente con que verifique las leyes de conservación, sino que debe ser estable ante pequeñas perturbaciones. Así, un flujo laminar es estable ante pequeñas perturbaciones sólo cuando se satisfacen ciertas condiciones. Por ejemplo, en el experimento de Reynolds la condición consiste en que el número de Reynolds debe ser inferior a un valor crítico. Cuando esto no sucede, perturbaciones infinitesimales crecen espontáneamente. En ocasiones, estas perturbaciones pueden crecer hasta una cierta amplitud y alcanzar un nuevo estado; el nuevo estado puede ser a su vez inestable frente a otro tipo de perturbaciones y crecer hasta un nuevo estado; finalmente, el flujo se convierte en una superposición de numerosas perturbaciones aleatorias y alcanza una condición, que es lo que se conoce como flujo turbulento. Esto explica la aparición de escalas en el seno del flujo a altos números de Reynolds.

Desde un punto de vista matemático, esta inestabilidad del flujo está relacionada con la interacción del término viscoso y de los términos no lineales convectivos. Es posible introducir una perturbación sobre las ecuaciones de constitución y analizar si la perturbación crece o decae con el tiempo. Puede ocurrir que un flujo sea estable frente a perturbaciones infinitesimales pero inestable frente a perturbaciones suficientemente grandes.

A continuación se va a describir un tipo muy frecuente de inestabilidad, que es la denominada *inestabilidad de capa de cortadura*. Una capa de cortadura es una región de flujo en la que existen altos gradientes de velocidad. Las velocidades a ambos lados de la superficie de separación son muy diferentes, dando lugar una región delgada donde la velocidad varía bruscamente. Estas capas de cortadura pueden ser modelizadas como superficies de discontinuidad.

Considérese tal discontinuidad en un sistema de referencia en el cual las velocidades sobre ambos lados de la discontinuidad son iguales y opuestas. En este flujo se introduce una pequeña perturbación que desarrolla una ligera ondulación. Esto incrementará ligeramente la velocidad del fluido sobre las zonas convexas de la superficie (A, B’, C, D’) mientras que disminuirá ligeramente sobre las cóncavas (A’, B, C’, D). Si el flujo se considera estacionario, la aplicación de la ecuación de cantidad de movimiento indicará que una fuerza neta actúa amplificando las perturbaciones, con lo que la capa de cortadura es inestable y tiende a enrollarse. La ondulación inicial se distorsiona cada vez más y acaba convirtiéndose en una serie de vórtices o torbellinos contrarrotantes.



Inestabilidad de capa de cortadura

4. LA CASCADA DE ENERGÍA Y LAS ESCALAS DE LA TURBULENCIA

4.1. CASCADA DE ENERGÍA

En el desarrollo de la turbulencia, los vórtices de mayor tamaño interaccionan con el flujo principal y extraen energía de él. El tamaño o escala de estos vórtices es comparable a la escala del flujo. Sin embargo, estos vórtices son inestables en sí mismos y, por efecto de la cortadura o de la interacción entre ellos, tienden a dividirse en vórtices más pequeños que a su vez tienden a dividirse. Este proceso de rompimiento se produce en cascada, por lo que en un movimiento turbulento coexisten una gran variedad de escalas, correspondientes a distintos tamaños de vórtices, los cuales son arrastrados y estirados por la acción de los gradientes de velocidad del flujo medio dominante y por su interacción con los demás vórtices. Este proceso de división continúa hasta que la escala de los vórtices es tan pequeña que el número de Reynolds de los mismos no es lo suficientemente grande como para que la inestabilidad persista. En estos vórtices pequeños, la energía cinética contenida en los vórtices se transforma en energía térmica por disipación viscosa. Al proceso completo se le denomina ***cascada de energía***.

4.2. ESCALAS DE LA TURBULENCIA

Habitualmente, esta variedad de torbellinos de diferentes escalas que existen en cualquier flujo turbulento se puede agrupar en tres escalas.

i) **Macroescala:** es la escala asociada a los vórtices más grandes; sean U, L y T la velocidad, la longitud y el tiempo característicos de estos vórtices (que además coinciden con las variables características del flujo). El número de Reynolds asociado será el mismo que el del flujo principal: $\mathrm{Re} = \dfrac{U\,L}{\nu}$. Las características de estos grandes torbellinos dependen de las condiciones de contorno del flujo y presentan un marcado carácter *anisótropo* (dependientes de la dirección).

ii) **Escalas intermedias:** son escalas inferiores a la macroescala, en las que todavía no existe disipación de energía; se van a denominar u, λ y τ a la velocidad, la longitud y el tiempo característicos de estos vórtices.

iii) **Microescala:** es la escala más pequeña, en la que se produce la disipación de energía; sus valores característicos se van a denominar u_0, λ_0 y τ_0. Al contrario que en la macroescala, estos torbellinos presentan un carácter *isótropo*, es decir, el flujo ha 'olvidado' de donde procede.

Teniendo en cuenta estas escalas, a continuación se va analizar el proceso denominado *cascada de energía*. La energía específica contenida en los grandes torbellinos por unidad de tiempo será:

$$e_L = \frac{U^2/2}{T} \approx U^2\,T^{-1} \approx U^3\,L^{-1}$$

mientras que la energía específica disipada por unidad de tiempo en la macroescala vendrá dada por:

$$\Phi_L \approx \nu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^2 \approx \nu \frac{U^2}{L^2}$$

por lo que la relación entre la energía contenida y la energía disipada es:

$$\frac{e_L}{\Phi_L} = \frac{U^3 L^{-1}}{\nu\, U^2 L^{-2}} \approx \frac{U\, L}{\nu} \approx Re_L >> 1$$

de donde se deduce que en la macroescala la disipación de energía es despreciable. Por tanto, toda su energía se transfiere a los torbellinos de las escalas intermedias:

$$e_L \approx e_\lambda \Rightarrow \; U^3\, L^{-1} \approx u^3\, \lambda^{-1}$$

En una escala intermedia, el cociente entre energía transportada y disipada es también igual al número de Reynolds asociado a dicha escala, esto es:

$$\frac{e_\lambda}{\Phi_\lambda} = \frac{u^3 \lambda^{-1}}{\nu\, u^2 \lambda^{-2}} \approx \frac{u\, \lambda}{\nu} \approx Re_\lambda = Re_L \left(\frac{\lambda}{L} \right)^{4/3}$$

Como el cociente de longitudes todavía no es muy pequeño, el número de Reynolds asociado a la escala es grande y la disipación de energía todavía es despreciable. Entonces, se puede plantear:

$$e_L \approx e_\lambda \approx e_{\lambda_0} \Rightarrow \; U^3\, L^{-1} \approx u^3\, \lambda^{-1} \approx u_0^3\, \lambda_0^{-1}$$

expresión que representa la cascada de energía. Por tanto, en la microescala:

$$\frac{e_{\lambda_0}}{\Phi_{\lambda_0}} = \frac{u_0^3 \lambda_0^{-1}}{\nu\, u_0^2 \lambda_0^{-2}} \approx Re_{\lambda_0} = Re_L \left(\frac{\lambda_0}{L} \right)^{4/3}$$

Como la energía transportada es del mismo orden que la energía disipada, el anterior cociente será del orden de la unidad:

$$\frac{e_{\lambda 0}}{\Phi_{\lambda 0}} \approx 1 \quad \Rightarrow Re_L \left(\frac{\lambda_0}{L} \right)^{4/3} = 1 \quad \Rightarrow \frac{\lambda_0}{L} \approx Re_L^{-3/4}$$

expresión que relaciona las longitudes características de la microescala y de la macroescala. En la bibliografía se denomina a λ_0 como microescala de Kolmogorov, que es aquella en la que se disipa toda la energía, y cuyo Reynolds asociado vale la unidad.

En la anterior expresión, se aprecia que a medida que aumenta el Reynolds del flujo principal, la diferencia entre la escala de Kolmogorov y la escala macroscópica se hace cada vez mayor.

Para resaltar el significado de esta expresión, supóngase que se quiere medir el perfil de velocidades en una sección transversal de un flujo en un conducto, en los casos de régimen laminar y régimen turbulento. Para determinar el perfil laminar, bastará con medir, por ejemplo, la velocidad en 10 puntos de la sección (cada D/10). Para régimen turbulento, y asumiendo que $Re_L = 10^4$: $\lambda_0 \approx D\, Re_L^{-3/4} = D\, 10^{-3}$, por lo que para conseguir la misma precisión que en flujo laminar, se necesitan 10^4 medidas.

En el caso de aplicaciones aeronáuticas, se pueden alcanzar Reynolds de 10^8, lo que supone, en el caso sencillo de geometrías bidimensionales, realizar un número de medidas del orden de un billón (10^{12}) de puntos. En definitiva, determinar la escala de Kolmogorov equivale a resolver directamente las ecuaciones de Navier-Stokes. Así pues, la resolución tanto experimental como numérica de la microescala es una labor imposible.

En cuanto a las escalas de velocidad, se tiene:

$$\left(\frac{u_0}{U}\right)^3 \approx \frac{\lambda_0}{L} \Rightarrow \frac{u_0}{U} \approx Re_L^{-1/4}$$

es decir, menos sensible al número de Reynolds que los tamaños característicos. Las fluctuaciones de velocidad son muy grandes para escalas muy pequeñas. Tomando como antes $Re_L = 10^4$, se tendrá $u_0/U=0.1$, por lo que se tendrán altos gradientes de velocidad.

5. MÉTODOS DE CÁLCULO Y ANÁLISIS DE FLUJOS TURBULENTOS

5.1. NIVELES DE MODELIZACIÓN

Tal y como se ha señalado, la *tridimensionalidad* y *no estacionariedad*, junto con el amplio rango de escalas espaciales y temporales, caracterizan los flujos turbulentos. Pero incluso las escalas más pequeñas y con fluctuaciones más rápidas, la microescala, están aún varios órdenes de magnitud por encima de las escalas moleculares. Se pueden aplicar por tanto las ecuaciones de constitución de la Mecánica de Fluidos para un medio continuo.

Actualmente no es posible la resolución exacta de estas ecuaciones; sin embargo, en los últimos años y debido a la rápida evolución de los ordenadores y al desarrollo de algoritmos específicos, ha habido un gran avance en su resolución numérica dando lugar a la dinámica de fluidos computacional (CFD, 'Computational Fluid Dynamics').

La resolución directa de las ecuaciones de Navier-Stokes, o DNS ('Direct Numerical Simulation') es la manera más evidente y precisa de predecir un flujo turbulento. Se resuelven todas las escalas espaciales y temporales del flujo turbulento sin promediados o aproximaciones; los únicos errores provienen de las discretizaciones numéricas. La idea es tan sencilla como difícil de llevar a la práctica por lo alto de su coste computacional. Sin embargo, su utilización práctica queda limitada a geometrías sencillas con Reynolds bajos.

Dentro del amplio rango de escalas espaciales y temporales de los flujos turbulentos son las escalas grandes las más efectivas en el transporte de propiedades, mientras que las menores escalas son más débiles y su capacidad de transporte es menor. Teniendo esto en cuenta, se puede intentar simular más exactamente las escalas mayores, dando lugar a la simulación de los torbellinos grandes, o LES ('Large Eddy Simulation'). Debido a la mayor universalidad y homogeneidad de las escalas pequeñas, cabe esperar que estos modelos sean simples y que los ajustes necesarios cuando se apliquen a flujos diferentes sean escasos. Aún así, este tipo de simulación es exigente en cuanto a capacidad de los ordenadores y al tiempo de cálculo.

El tipo de aproximaciones que con más frecuencia se utiliza en aplicaciones de ingeniería para predecir flujos turbulentos son los basados en métodos estadísticos para su estudio. Surgen así los modelos basados en el promediado de Reynolds de las ecuaciones de Navier-Stokes, o modelos RANS ('Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations'). A continuación se describen los principios básicos de estos métodos.

5.2. MODELOS RANS

Como se ha visto anteriormente, en un flujo turbulento existen estructuras y vórtices con un amplio rango de tamaños:

Por ejemplo, considérese un dominio de 0.1 x 0.1 m^2 y un flujo sobre él con Re muy grande:

Tamaño de los vórtices: entre 10 μm y 100 μm ⟶ 10^9-10^{12} celdas

Frecuencia: hasta 10 kHz ⟶ $\Delta t = 100$ μs

¡No es posible una simulación directa!

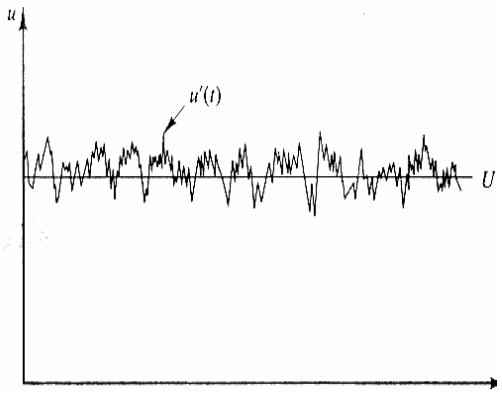
En aplicaciones ingenieriles, vamos a estar más interesados en los efectos del flujo medio que en los detalles de las fluctuaciones, por lo que se adopta una aproximación estadística, promediando las ecuaciones de conservación ('time-averaging') durante un periodo de tiempo mucho más grande que el periodo característico de las fluctuaciones turbulentas.

Con el fin de ilustrar el proceso, se van a promediar las ecuaciones de conservación de masa y de cantidad de movimiento en flujo incompresible estacionario:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + div(u\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\, div\, grad\, u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + div(v\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\, div\, grad\, v$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + div(w\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\, div\, grad\, w$$



Según este proceso, se descompone cada variable instantánea en la suma de un valor medio y de una fluctuación: **u=U+u'**; u=U+u'; v=V+v'; w=W+w', p=P+p'. Para analizar los efectos de las fluctuaciones, introducimos en las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento las descomposiciones mencionadas para **u** y p. Respecto a la *ecuación de continuidad*, teniendo en cuenta que $\overline{\mathrm{div}(\mathbf{u})} = \mathrm{div}(\mathbf{U})$, queda en la forma: $\mathrm{div}(\mathbf{U}) = \mathbf{0}$.

Aritmética con variables fluctuantes:

Sean las variables $f(t)=\bar{f}+f'$ y $g(t)=\bar{g}+g'$

-Valor medio: $\bar{f}=\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} f(t)dt$ con $\Delta t\to\infty$

-Valor fluctuante: f'; se verifica: $\overline{f'}=\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} f'(t)dt=0$; para caracterizar la fluctuación se utiliza el valor

rms ('root mean square'): $f_{rms}=\sqrt{\overline{f'^2}}=\left[\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} f'^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}}$

Se verifica:

$$\overline{f'}=\overline{g'}=0;\quad \bar{\bar{f}}=\bar{f};\quad \overline{\frac{\partial f}{\partial s}}=\frac{\partial \bar{f}}{\partial s};\quad \overline{\int f\,ds}=\int \bar{f}\,ds;$$
$$\overline{f+g}=\bar{f}+\bar{g};\quad \overline{f\,g}=\bar{f}\,\bar{g}+\overline{f'g'};\quad \overline{\bar{f}\,\bar{g}}=\bar{f}\,\bar{g};\quad \overline{f'\bar{g}}=0$$
$$\overline{\text{div grad } f}=\text{div grad } \bar{f}$$

Sea la variable vectorial **u=U+u'**, entonces:

$$\overline{\text{div}(\mathbf{u})}=\text{div}(\mathbf{U});\quad \overline{\text{div}(f\,\mathbf{u})}=\text{div}(\overline{f\,\mathbf{u}})=\text{div}(\bar{f}\,\mathbf{U})+\text{div}(\overline{f'\mathbf{u}'})$$

Se lleva a cabo un proceso similar en las tres componentes de la ecuación de cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+div(U\mathbf{U})+div(\overline{u'\mathbf{u}'})=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\, div\, grad\, U$$

(I) (II) (III) (IV) (V)

$$\frac{\partial V}{\partial t}+div(V\mathbf{U})+div(\overline{v'\mathbf{u}'})=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\, div\, grad\, V$$

(I) (II) (III) (IV) (V)

$$\frac{\partial W}{\partial t}+div(W\mathbf{U})+div(\overline{w'\mathbf{u}'})=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}+\nu\, div\, grad\, W$$

(I) (II) (III) (IV) (V)

Los términos (I), (II), (IV) y (V) aparecen también en las ecuaciones instantáneas, pero el proceso de promediado ha introducido nuevos términos. Estas ecuaciones denominadas **ecuaciones de Reynolds** se pueden rescribir de la siguiente manera:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + div(U\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\, div\, grad\, U + \left[-\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}\right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + div(V\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\, div\, grad\, V + \left[-\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}\right]$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + div(W\mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + \nu\, div\, grad\, W + \left[-\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z}\right]$$

Se puede expresar que los términos extras provienen de 6 tensiones adicionales denominadas **tensiones de Reynolds:**

$$\tau_{xx} = -\rho\overline{u'^2} \qquad \tau_{yy} = -\rho\overline{v'^2} \qquad \tau_{zz} = -\rho\overline{w'^2}$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\rho\overline{u'v'} \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx} = -\rho\overline{u'w'} \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} = -\rho\overline{v'w'}$$

¡Han aparecido 6 nuevas incógnitas! Hay que relacionarlas con incógnitas ya existentes: *Necesitamos un modelo de turbulencia (o de cierre de las ecuaciones).*

Se puede obtener una ecuación promediada para una magnitud escalar:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + div(\Phi\mathbf{U}) = div(\Gamma^*_\Phi\, grad\, \Phi) + \left[-\frac{\partial \overline{u'\varphi'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'\varphi'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w'\varphi'}}{\partial z}\right] + S_\Phi$$

5.3. DETALLES DE ALGUNOS MODELOS DE TURBULENCIA

En este apartado se van a presentar diferentes modelos de turbulencia (más simples y más complicados), indicando sus características, las hipótesis que realizan, las ecuaciones a que dan lugar y su inclusión en las ecuaciones de Navier-Stokes. Se van a presentar los siguientes modelos:

Modelo de 0 ecuaciones: modelo de la longitud de mezcla

Modelo de 2 ecuaciones: modelo k-ε

Modelo de las tensiones de Reynolds

Modelo de las tensiones algebraicas

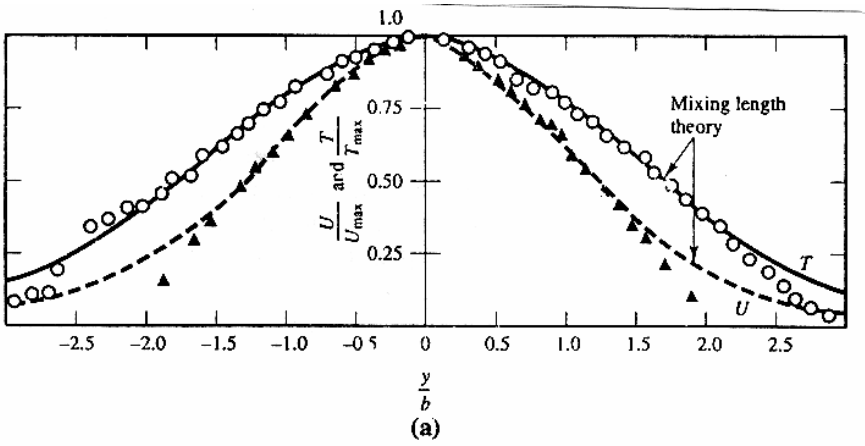
5.3.1. Modelo de la longitud de mezcla.

El concepto de longitud de mezcla fue introducido por Ludwig Prandtl [1875-1953]; representa la distancia media, perpendicular al flujo, a lo largo de la cual una partícula pierde su cantidad de movimiento extra y adquiere la velocidad media que exista en la nueva posición. En realidad, el cambio es gradual: $\Delta U = l\,\frac{\partial U}{\partial y}$. Prandtl dedujo que: $-\rho\,\overline{u'v'} = -\rho\, l^2\,\frac{\partial U}{\partial y}\left|\frac{\partial U}{\partial y}\right|$, siendo $l = k\,y$; $k = 0.4$, siendo y la distancia a una pared.

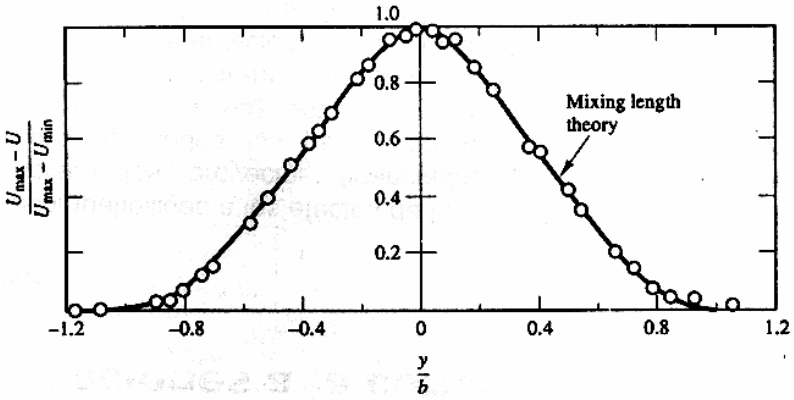
-Valores de la longitud de mezcla para diferentes flujos:

Table 3.3 Mixing lengths for two-dimensional turbulent flows

Flow	*Mixing length l*	*L*
Mixing layer	0.07L	Layer width
Jet	0.09L	Jet half width
Wake	0.16L	Wake half width
Axisymmetric jet	0.075L	Jet half width
Boundary layer ($\partial p/\partial x = 0$)		
viscous sub-layer and		
log-law layer ($y/L \leq 0.22$)	$\kappa y[1 - \exp(-y^+/26)]$	Boundary layer thickness
outer layer ($y/L \geq 0.22$)	$0.09L$	
Pipes and channels (fully developed flow)	$L[0.14 - 0.08(1 - y/L)^2 - 0.06(1 - y/L)^4]$	Pipe radius or channel half width



(a)



(b)

Fig. 3.13 Results of calculations using mixing length model for (a) planar jet and (b) wake behind a long slender circular cylinder

Ventajas: -es fácil de implementar
-proporciona una buena predicción de chorros, capas de mezcla, estelas y capas límite
-está suficientemente validado

Inconvenientes: -es incapaz de describir flujos con separación o recirculación
-sólo calcula propiedades medias y tensiones turbulentas

5.3.2. Modelo k-ε.

Pretende corregir los defectos del método anterior, y permitir calcular flujos con recirculación o separación. Se define la energía cinética turbulenta instantánea como $k_I(t) = K + k$, siendo:

-Energía cinética turbulenta media: $K = \frac{1}{2}\left(U^2 + V^2 + W^2\right)$

-Energía cinética turbulenta: $k = \frac{1}{2}\left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}\right)$

Ecuaciones de conservación para K y k:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho K)}{\partial t} + div(\rho K\mathbf{U}) = div\left(-P\mathbf{U} + 2\mu\mathbf{U}E_{ij} - \rho\mathbf{U}\overline{u_i'u_j'}\right) - 2\mu E_{ij}\,.\,E_{ij} + \rho\overline{u_i'u_j'}\,.\,E_{ij}}$$

(I) (II) (III) (IV) (V) (VI) (VII)

(3.31)

Rate of change of K	+	Transport of K by convection	=	Transport of K by pressure	+	Transport of K by viscous stresses	+	Transport of K by Reynolds stress
			−	Rate of dissipation of K	+	Turbulence production		

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + div(\rho k \mathbf{U}) = div\left(-\overline{p'\mathbf{u}'} + 2\mu\overline{\mathbf{u}'e'_{ij}} - \rho\tfrac{1}{2}\overline{u'_i \cdot u'_i u'_j}\right) - 2\mu\overline{e'_{ij} \cdot e'_{ij}} - \rho\overline{u'_i u'_j} \cdot E_{ij}$$

(I) (II) (III) (IV) (V) (VI) (VII)

(3.32)

Rate of change of k	+	Transport of k by convection	=	Transport of k by pressure	+	Transport of k by viscous stresses	+	Transport of k by Reynolds stress
			−	Rate of dissipation of k	+	Turbulence production		

donde $e_{ij} = E_{ij} + e'_{ij}$; por ejemplo:

$e_{xx} = \partial U/\partial x + \partial u'/\partial x$; $e_{xy} = 0.5\cdot(\partial U/\partial y + \partial U/\partial x) + 0.5\cdot(\partial u'/\partial y + \partial v'/\partial x)$

El término (VII) aparece en ambas expresiones con diferente signo: representa una producción de k a costa de una destrucción de K.

El término (VI) representa la disipación de energía en los remolinos más pequeños. Es siempre negativo. A $\varepsilon = 2\,\nu\,\overline{e_{ij}'e_{ij}'}$ se le llama tasa de disipación de energía cinética turbulenta. Es el término de mayor valor en la ecuación, comparable al término de producción.

Se puede establecer una ecuación de transporte para k y para ε, y usar estas variables para definir unas escalas de velocidad y de longitud características:

$$v = k^{1/2};\ l = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon};\ \mu_t = \rho\ C_\mu\ \frac{k^2}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + div(\rho k \mathbf{U}) = div\left[\frac{\mu_t}{\sigma_k} grad\ k\right] + 2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ij} - \rho\varepsilon$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + div(\rho \varepsilon \mathbf{U}) = div\left[\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} grad\ \varepsilon\right] + C_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k} 2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ij} - C_{2\varepsilon}\rho\frac{\varepsilon^2}{k}$$

Rate of change of k or ε	+	Transport of k or ε by convection	=	Transport of k or ε by diffusion	+	Rate of production of k or ε
				Rate of destruction of k or ε		

Las ecuaciones contienen cinco (5) constantes ajustables, para las cuales el modelo k-ε utiliza valores obtenidos mediante ajuste para un amplio rango de flujos turbulentos:

$$C_\mu = 0.09; \quad \sigma_k = 1; \quad \sigma_\varepsilon = 1.3; \quad C_{1\varepsilon} = 1.44; \quad C_{2\varepsilon} = 1.92$$

Con este modelo, las tensiones de Reynolds se calculan:

$$-\rho\overline{u_i' u_j'} = \mu_t\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij} = 2\mu_t E_{ij} - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}$$

<u>Condiciones de contorno:</u>

Entradas: se fijan valores de k y ε:

$$k = \frac{3}{2}\left(U_{Ref}\ T_i\right)^2; \varepsilon = C_\mu^{4/3}\ \frac{k^{3/2}}{l}; \quad l = 0.7L$$

Salidas o simetrías: $\frac{\partial k}{\partial n} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0$

Corriente libre: k = ε = 0

Paredes: depende de Re (funciones de pared)

Ventajas: -es el modelo más simple que solo necesita condiciones iniciales o de contorno
-buenos resultados para muchos flujos industriales: capas de cortadura, recirculaciones
-es el modelo más validado

Inconvenientes: -más costoso que el modelo de longitud de mezcla (2 ecuaciones diferenciales más)
-mal comportamiento en algunos flujos no confinados (estelas lejanas), flujos con capas límites muy curvadas, flujos con rotación, flujos desarrollados en conductos no circulares

5.3.3. Modelo de las tensiones de Reynolds ('Reynolds Stress Model', RSM).

Desarrollado en 1975 por Launder. Pretende corregir los defectos del modelo k-ε. Establece una ecuación diferencial para cada tensión de Reynolds modelizando los términos de producción, difusión, transporte y rotación. Hay que añadir una ecuación para ε (la misma del modelo k-ε).

$$\boxed{\frac{DR_{ij}}{Dt} = P_{ij} + D_{ij} - \varepsilon_{ij} + \Pi_{ij} + \Omega_{ij}}$$

Rate of change of $R_{ij} = \overline{u_i' u_j'}$	+	Transport of R_{ij} by convection	=	Rate of production of R_{ij}	+	Transport of R_{ij} by diffusion	−	Rate of dissipation of R_{ij}
				+ Transport of R_{ij} due to turbulent pressure-strain interactions		+ Transport of R_{ij} due to rotation		

donde $R_{ij} = \frac{-\tau_{ij}}{\rho} = \overline{u'_i\ u'_j}$

<u>Condiciones de contorno:</u>

Entradas: se fijan valores de R_{ij} y ε

Salidas o simetrías: $\frac{\partial R_{ij}}{\partial n} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0$

Corriente libre: $R_{ij} = \varepsilon = 0$

Paredes: depende de Re (funciones de pared)

Ventajas: -es el modelo más general de todos
-válido para muchos flujos industriales, incluyendo chorros, conductos no circulares, flujos con mucha curvatura

Inconvenientes: -muy costoso (7 ec. dif. más que el modelo de longitud de mezcla, y 5 ec. dif. más que el modelo k-ε)
-no tan validado como los modelos anteriores
-problemas en chorros axisimétricos y flujos no confinados con recirculación

5.3.4. Modelo de las tensiones algebraicas ('Algebraic Stress Model', ASM).

Desarrollado en 1982 por Rodi. Se eliminan o modelizan los términos de convección y difusión de R_{ij}, que supone un gran esfuerzo de cálculo. Tiene en cuenta la anisotropía de estas tensiones:

$$R_{ij} = \overline{u_i' u_j'} = \tfrac{2}{3}k\delta_{ij} + \left(\frac{C_D}{C_1 - 1 + \frac{\bar{P}}{\varepsilon}}\right)\left(P_{ij} - \tfrac{2}{3}P\delta_{ij}\right)\frac{k}{\varepsilon}$$

siendo $P_{ij} = -\left(R_{im}\frac{\partial U_j}{\partial x_m} + R_{jm}\frac{\partial U_i}{\partial x_m}\right)$; estas ecuaciones son algebraicas, si k y ε son conocidos.

Ventajas: -tiene en cuenta la anisotropía de las tensiones de Reynolds
-combina la generalidad del modelo RSM con el menor coste del k-ε
-buenos resultados en capas de cortadura

Inconvenientes: -más costoso que el modelo k-ε, aunque menos que el RSM
-no tan validado como los modelos anteriores
-válido para las hipótesis de la modelización de los términos de convección y difusión

6. BIBLIOGRAFÍA

Información biográfica de Osborne Reynolds:

www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Reynolds.html

www.eng.man.ac.uk/historic/reynolds/oreyna.htm

Fotografías del Tanque de Reynolds:

www.eng.man.ac.uk/mech/nerg/Reypics.htm

Chassaing, P., 'Turbulence en Mécanique des Fluides', Cépadués-Éditions, 2000.

Hinze, J.O., 'Turbulence', McGraw-Hill, 1975.

Anexo I. CARACTERÍSTICAS DE FLUJOS TURBULENTOS SIMPLES

I.1. Flujos turbulentos no confinados ("free turbulent flows").

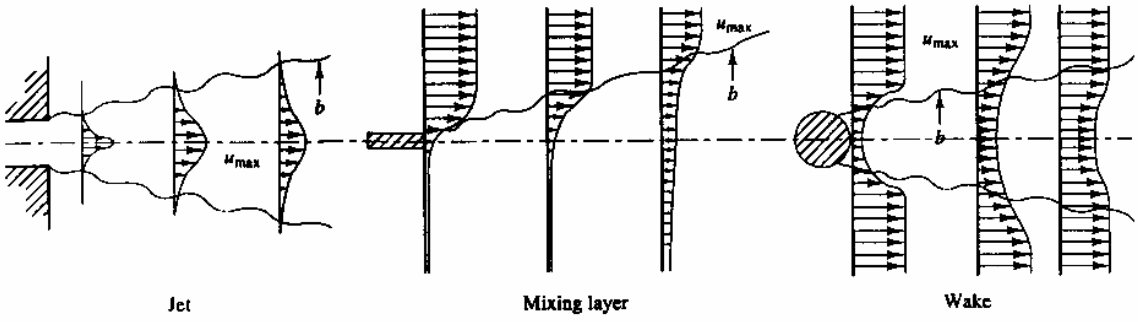


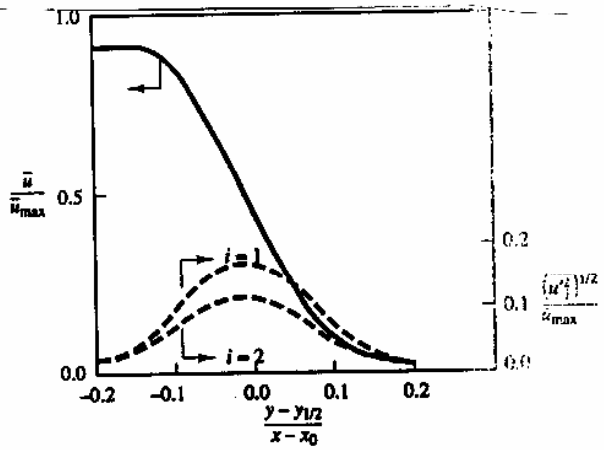
Fig. 3.8 Free turbulent flows

$$\frac{U}{U_{max}} = g\left(\frac{y}{b}\right)$$ for jets

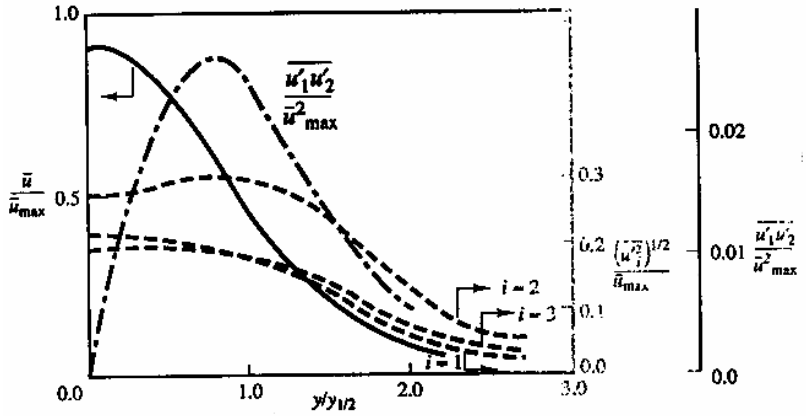
$$\frac{U - U_{min}}{U_{max} - U_{min}} = f\left(\frac{y}{b}\right)$$ for mixing layers

$$\frac{U_{max} - U}{U_{max} - U_{min}} = h\left(\frac{y}{b}\right)$$ for wakes

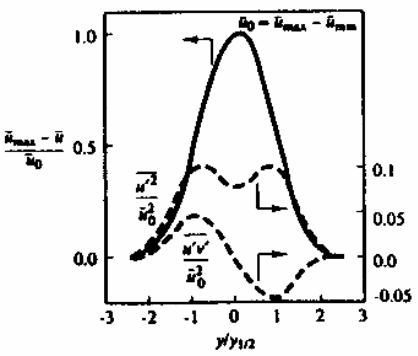
Fig. 3.10 Mean velocity distributions and turbulence properties for (a) two-dimensional mixing layer, (b) planar turbulent jet and (c) wake behind a solid strip



(a)



(b)



(c)

I.2. Capa límite sobre una placa plana y flujo en conductos.

$u^+ = u/u^*$

$y^+ = (y\, u^*)/\nu$

$u^* = (\tau_w/\rho)^{1/2}$

Existen dos zonas:

1) Zona interior (10-20% de la capa límite) formada por:

Subcapa lineal: -los efectos viscosos son dominantes

-la tensión cortante es la de la pared

-perfil de velocidades: $u^+ = y^+$

-ley válida para $y^+ < 5$

Capa logarítmica: -esfuerzos viscosos y turbulentos comparables

-perfil de velocidades (ley logarítmica): $u^+ = (1/k) \ln y^+ + B$; k=0.41; B=5

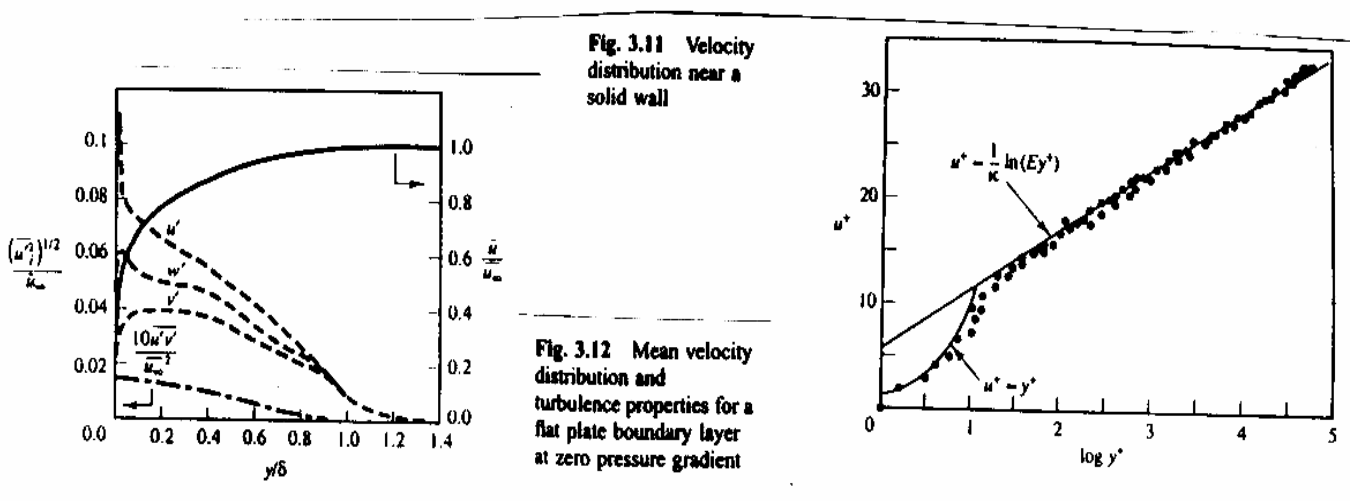


Fig. 3.11 Velocity distribution near a solid wall

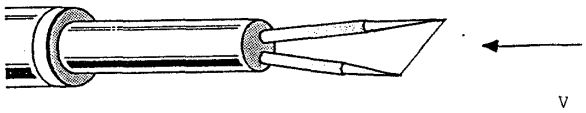
Fig. 3.12 Mean velocity distribution and turbulence properties for a flat plate boundary layer at zero pressure gradient

2) Zona exterior: -flujo dominado por esfuerzos de inercia, sin efectos viscosos:

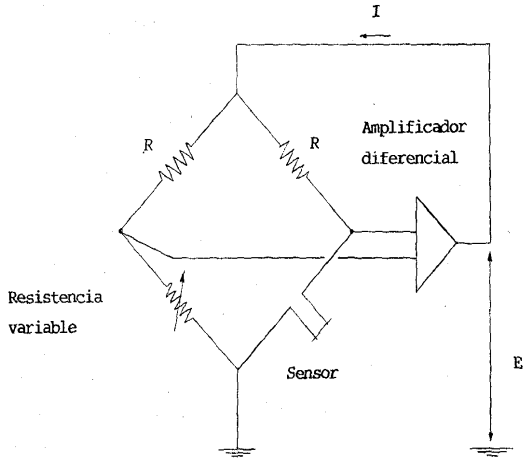
-perfil de velocidades (ley de defecto de velocidad): $(U_{max} - u)/u^+ = (1/k) \ln (y/\delta) + A$

Anexo II. TÉCNICAS DE MEDIDA: ANEMOMETRÍAS TÉRMICA Y LÁSER

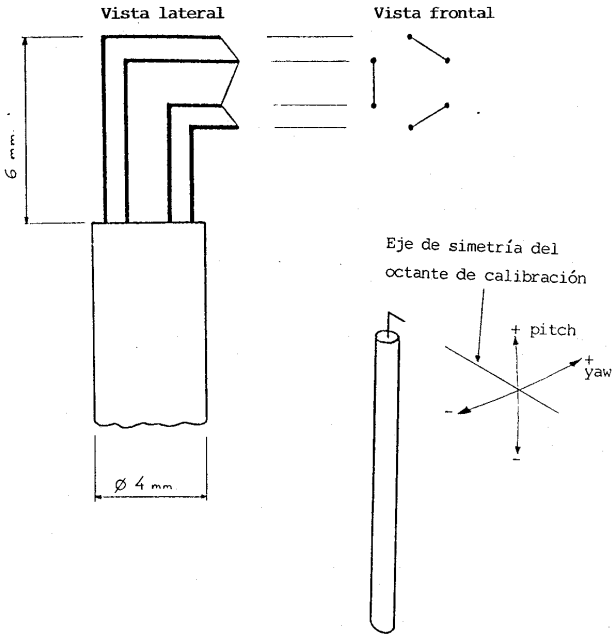
II.1. Nociones de anemometría térmica.

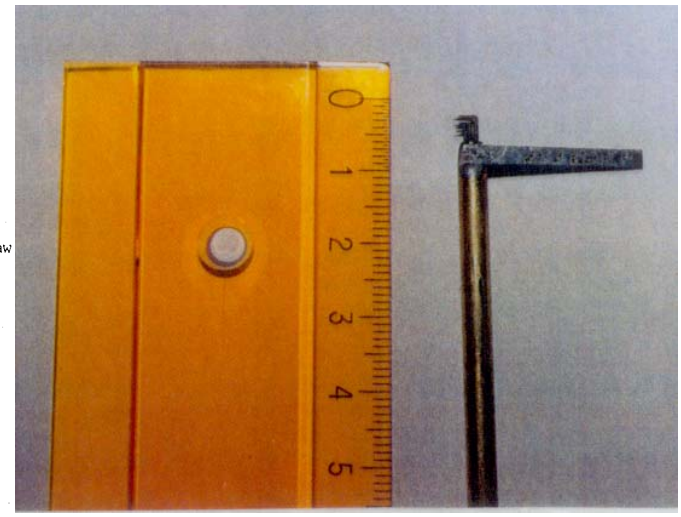


Sonda de hilo caliente

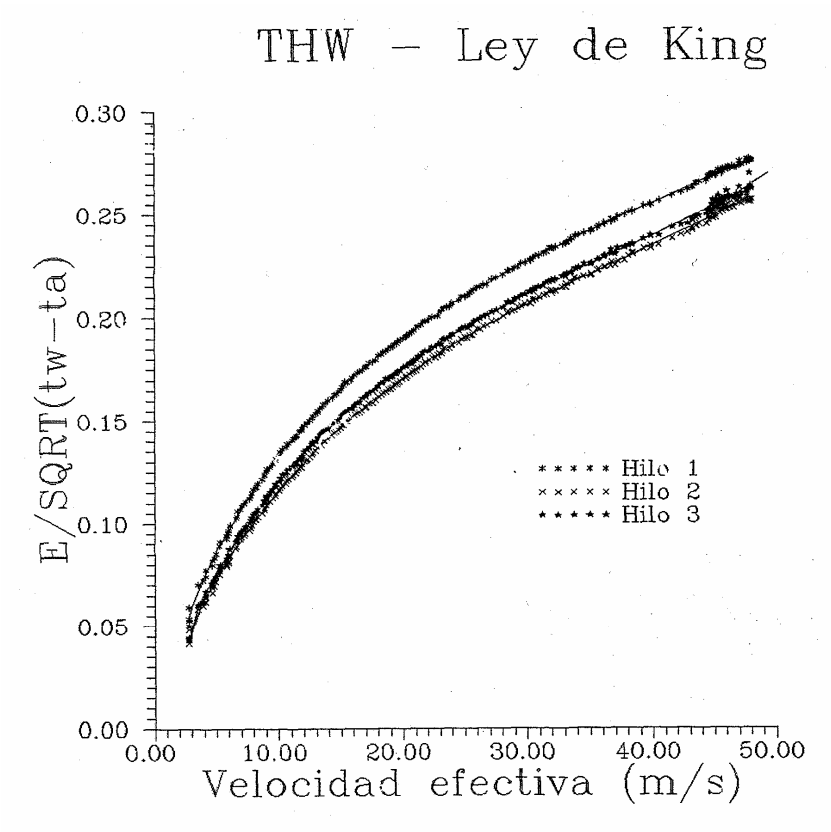


Anemómetro de temperatura constante

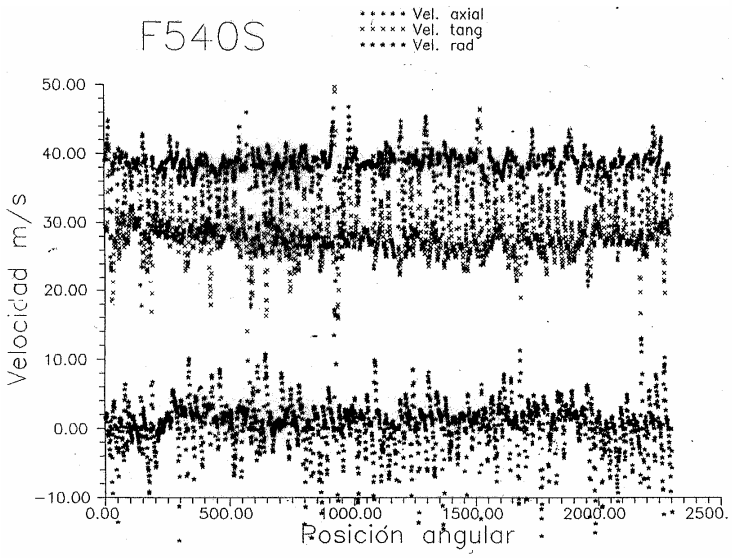




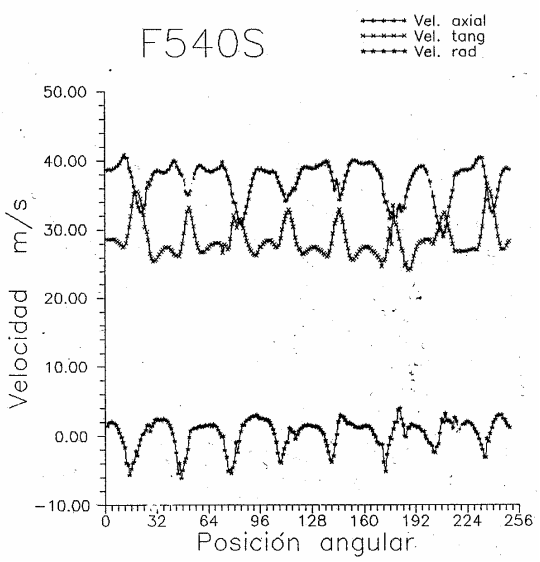
Sonda triple. Referencia de ángulos utilizada



Ley de King de una sonda triple



Distribución instantánea de velocidad obtenida con una sonda triple a la salida de un ventilador axial



Distribución media de velocidad obtenida con una sonda triple a la salida de un ventilador axial

II.2. Técnicas láser para medidas en Mecánica de Fluidos.

Mediante la técnica denominada PIV ('Particle Image Velocimetry') se pretende medir la velocidad de ciertas partículas arrastradas por un flujo. Las partículas pueden estar presentes ya en el flujo o ser inyectadas. Hay dos aspectos que intervienen decisivamente en la precisión de las medidas: las *partículas* que deben añadirse al flujo para ser visualizadas y el *sistema láser* para visualizarlas. El procedimiento consiste en iluminar una zona del flujo con un rayo láser de forma que se puedan distinguir la posición de las partículas. Para ello, estas partículas han de tener unas propiedades lumínicas 'monitorizables' al ser enfocadas con el rayo láser (absorción, difracción,...).

Sembrado de partículas

Hay que procurar que las partículas a añadir no tengan una densidad muy distinta al flujo principal y que no sean muy grandes, si se quiere que la precisión de las medidas no se vea afectada (partículas muy grandes no llevarían la misma velocidad que el flujo). Lo mejor es filtrar primero el fluido y luego añadirle partículas cuyo tamaño, densidad, propiedades lumínicas y forma se puedan conocer y controlar de alguna manera.

Preparación del láser

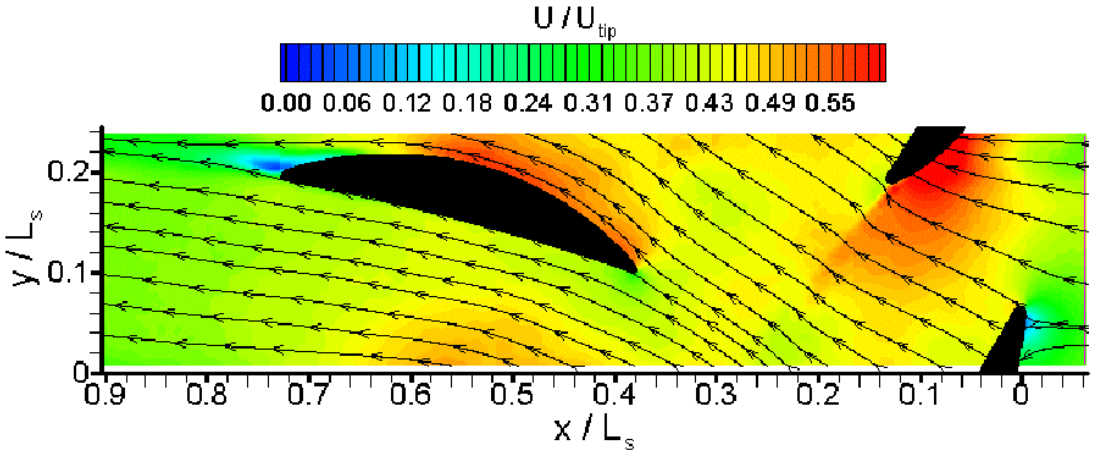
Una vez conseguido un flujo con partículas cuya densidad no sea muy distinta a la del flujo principal y cuyas propiedades al ser iluminadas por el láser sean conocidas, se está en condiciones de iluminar la zona en la que queramos hacer las medidas. Esto no es sencillo: se requiere un sistema óptico que dirija el láser (lentes cóncavas-convexas) y alguna forma de hacer una fotografía de dicha zona (accesibilidad visual de dicha zona). Además del sistema de lentes y del láser, se necesita una cámara con una suficiente definición espacial y temporal.

Realización de las medidas

Las medidas se basan en la ecuación del movimiento rectilíneo uniforme, es decir: $\boldsymbol{x} = \mathbf{v}\, \boldsymbol{t}$. La clave de la validez de dicha ecuación y del campo de velocidad al que dará lugar es conseguir dos fotos en instantes muy próximos, es decir, en dos tiempos $\boldsymbol{t}$ y $\boldsymbol{t'}$ separados lo menos posible (normalmente pocos milisegundos) y entonces, $\mathbf{v} = \boldsymbol{x} / (\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t'})$. Para conocer $\boldsymbol{x}$ de cada partícula hay que identificarlas por parejas en las dos fotografías. Este proceso se hace con métodos estadísticos que identifican "la posición más probable" en la segunda fotografía de cada una de las partícula de la primera fotografía. Una vez identificadas las partículas en las dos fotografías se calcula $\boldsymbol{x}$ y se obtiene $\mathbf{v}$. Si hubiera sólo una partícula, este método sería sencillo, pero al existir miles de partículas, la identificación resulta clave en la determinación del campo de velocidades.

Ejemplo

Si todo el procedimiento descrito se hace con las correspondientes precauciones (buscando la precisión en la medida), se pueden obtener "fotografías muy bonitas del flujo" en las distintas aplicaciones prácticas. Un ejemplo se muestra en la siguiente figura (flujo alrededor de los álabes de una bomba axial) y se puede ver una animación obtenida como superposición de figuras obtenidas en instantes sucesivos en www.me.jhu.edu/~lefd/turbo/turbo.htm



Ventajas: método no intrusivo; muy efectivo si se hace con las correspondientes precauciones; válido para casi cualquier fluido.

Inconvenientes: muy caro (cámara, partículas, láser, lentes, adquisición de posiciones de las partículas); precisa aplicaciones accesibles.