

IX.- FLUJO VISCOSO INCOMPRESIBLE

IX.1.- FLUJO LAMINAR EN CONDUCTOS CIRCULARES

En un flujo laminar la corriente es relativamente lenta y no es perturbada por las posibles protuberancias del contorno, mientras que la viscosidad es relativamente grande, de forma que si por cualquier circunstancia se inicia un fenómeno de turbulencia, la viscosidad lo destruye.

En consecuencia la formulación que se va a desarrollar sirve, tanto para tuberías lisas como para tuberías rugosas, suponiendo que las partículas de fluido, en un flujo laminar a lo largo de un tubo, se mueven en capas cilíndricas coaxiales; en el eje del tubo, el desplazamiento se realiza a mayor velocidad,

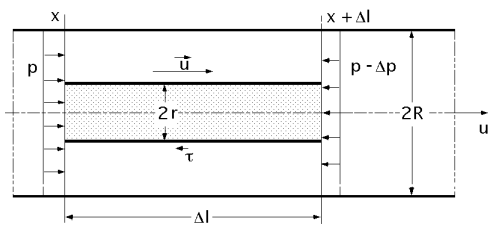


Fig IX.1.- Tubo de fluido para la ecuación de Poiseuille

mientras que en las paredes permanece en reposo.

La distribución de velocidades en una sección transversal cualquiera del tubo obedece a las fuerzas de rozamiento transmitidas de capa en capa. Si se considera un tubo por el que circula un fluido, Fig IX.1, de diámetro (2 R) y coaxialmente se toma un cilindro de fluido de diámetro (2 r) y longitud l, que se puede aislar imponiéndole unas condiciones de contorno, aplicando en su base frontal una presión p y en la posterior (p - p), así como el coeficiente de cortadura.

Sobre el cilindro actúa un *empuje longitudinal* de la forma:

$$F_{\text{emp}} = r^2 p$$

y la *fuerza de rozamiento* que se opone a este empuje:

$$F_{\text{roz}} = S \frac{du}{dr} = | S = 2 r l | = 2 r l \frac{du}{dr}$$

que es igual a la de empuje, por lo que:

$$2 r l \frac{du}{dr} = r^2 p \quad \frac{du}{dr} = \frac{r p}{2 l}$$

$$u = \frac{p}{2 l} \int_r^R r dr = \frac{p}{4 l} (R^2 - r^2)$$

que es una distribución del campo de velocidades de tipo paraboloides de revolución.

La expresión del caudal es:

$$Q = \int_0^R u \, d = \int_0^R u \, 2r \, dr = \frac{p}{4L} \int_0^R (R^2 - r^2) \, 2r \, dr = \frac{R^4 p}{8L}$$

que es directamente proporcional a la variación de presión entre las secciones A y B, a la cuarta potencia del radio de la conducción, e inversamente proporcional al tramo de tubería considerada de longitud l y a la viscosidad dinámica μ .

El caudal es: $Q = u_F A$, siendo u_F la velocidad media, que se puede poner en la forma:

$$u_F = \frac{Q}{A} = \frac{\frac{R^4 p}{8L}}{\pi R^2} = \frac{R^2 p}{8L}$$

siendo en esta ecuación p la caída de presión en toda la tubería de longitud L .

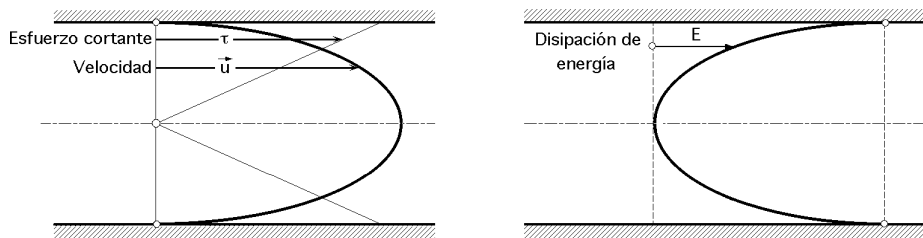


Fig XII.3.- Distribución del coeficiente de cortadura, y disipación de energía

La **velocidad máxima** se tiene para, $r = 0$, de la forma:

$$u_{\text{máx}} = \frac{R^2 p}{4L}$$

La relación entre la velocidad máxima y la velocidad media es: $u_{\text{máx}} = 2 u_F$

Despejando de la expresión de la velocidad media el valor de p , se obtiene la ecuación de **Poiseuille**, de la forma:

$$p = \frac{8L u_F}{R^2} = \frac{32L u_F}{d^2}$$

La pérdida de carga total p correspondiente a la longitud de tubería L se puede poner en función de la pérdida de carga por unidad de longitud de tubería J , en la forma:

$$p = J L$$

expresión que se puede poner en función del número de Reynolds, y el coeficiente de rozamiento, en la forma:

$$J = \frac{p}{L} = \frac{32 u_F}{d^2} = \frac{32 u_F}{d^2} \frac{u_F}{u_F} = \left| \text{Re} = \frac{u_F d}{\nu} \right| = \frac{32 u_F^2}{d \text{Re}} = \frac{u_F^2}{2 d} = \frac{u_F^2}{2 g d} = \frac{64}{\text{Re}}$$

que es el valor del coeficiente de rozamiento para el flujo de un fluido por un conducto en régimen laminar.

El valor de λ para el agua, en función de Re es: $\lambda = 1640 / Re$; ν en (m²/s)
 ρ = 1000 (kg/m³); μ en (kg/m²·s)

La ecuación de Poiseuille indica que la pérdida de carga en régimen laminar, para tuberías lisas o rugosas, es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad. En la Fig IX.2 se indican otras distribuciones correspondientes al coeficiente de cortadura, velocidad \bar{u} y disipación de energía por rozamiento.

IX.2.- MOVIMIENTO TURBULENTO

Todos los estudios realizados para determinar las pérdidas de carga en el movimiento turbulento, se pueden representar por la expresión:

$$J = \frac{\lambda u^2}{2d} = \frac{16}{2} \frac{Q^2}{d^5} = k Q^2$$

en la que: $\lambda = f(u, d, \nu, \mu) = f(Re, \frac{\epsilon}{d})$, siendo ϵ la rugosidad absoluta.

Para *tuberías lisas* se tiene: $\frac{\epsilon}{d} = 0$ $\lambda = f(Re)$

a) $2.000 < Re < 10^5$, $\lambda = 0,3164 Re^{-0,25}$ (Blasius)

b) $Re > 10^5$; $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg_{10} \frac{Re \sqrt{\lambda}}{2,51}$ (Primera ecuación de Kàrmàn-Prandtl)

Para *tuberías rugosas* se pueden dar tres casos según el valor del número de Reynolds.

Si el número de Reynolds es elevado: $\lambda = f(\frac{\epsilon}{d})$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg_{10} \frac{d}{\epsilon} + 1,74 \quad (\text{Segunda ecuación de Kàrmàn-Prandtl})$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg_{10} \frac{d}{\epsilon} + 1,14 \quad (\text{Nikuradse})$$

Si el número de Reynolds tiene un valor intermedio:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg_{10} \left(\frac{d}{3,71 \epsilon} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right), \text{ para } \lambda = f(Re, \frac{\epsilon}{d}) \quad (\text{Colebrook-White})$$

Para números de Reynolds bajos: $\lambda = f(Re)$

$$70.000 < Re < 1.500.000 \quad ; \quad \lambda = 0,0054 + 0,369 Re^{-0,3} \quad (\text{Herman})$$

Nikuradse experimentó con tuberías de rugosidad artificial, obtenida con granos de arena esféricos de diámetro ϵ , con los que cubría el interior de las tuberías.

Como una protuberancia pequeña podía ser insignificante en una tubería de gran diámetro, la variable representativa del fenómeno no era la rugosidad absoluta sino la relativa (ϵ/d) oscilando sus

valores, para tuberías comerciales, entre los límites $0,033 < \frac{\epsilon}{d} < 0,000985$.

La rugosidad natural de las tuberías comerciales (hierro fundido, hormigón, etc), es irregular. La rugosidad absoluta puede venir caracterizada por un valor de ϵ igual al diámetro de los granos de arena de una tubería de rugosidad artificial que diera el mismo valor de ϵ para un número de Re lo suficientemente elevado que cumpliera la ecuación: $f = f(\epsilon/d)$.

La ecuación de Colebrook-White es la más utilizada para hallar la pérdida de carga en los conductos industriales encontrándose los problemas prácticos, más interesantes, dentro de su campo de aplicación.

Tabla IX.1.- Valores de la rugosidad de algunos materiales utilizados en la construcción de tuberías

Tipo de tubería	Rugosidad ϵ (mm)
Vidrio, cobre o latón estirado	0,001 (ó lisas)
Latón industrial	0,025
Acero laminado nuevo	0,05
Acero laminado oxidado	0,15 a 0,25
Acero laminado con incrustaciones	1,5 a 3
Acero asfaltado	0,01
Acero soldado nuevo	0,03 a 0,1
Acero soldado oxidado	0,4
Hierro galvanizado	0,15 a 0,20
Fundición corriente nueva	0,25
Fundición corriente oxidada	1 a 1,5
Fundición asfaltada	0,1
Cemento alisado	0,3 a 0,8
Cemento bruto	Hasta 3

DIAGRAMA DE MOODY.- Las ecuaciones de Poiseuille, Blasius, Colebrook-White, Kàrmàn-Prandtl, Nikuradse, etc, permiten determinar todos los valores de f que se presentan en la práctica; la ecuación de Colebrook-White, de cálculo muy laborioso, es la más universal y en la práctica se recurre a un ábaco, conocido como diagrama de Moody, Fig IX.3, que:

a) *Está construido en papel doblemente logarítmico; las variables que utiliza son λ , Re y, por lo tanto, es un diagrama, ($\lg \lambda$, $\lg Re$).*

b) *Es la representación gráfica de dos ecuaciones:*

- *La ecuación de Poiseuille, que en papel logarítmico es una recta. La prolongación dibujada a trazos es la zona crítica, en la que la corriente puede seguir siendo laminar a pesar de ser $Re > 2000$. De no ser así, λ podría caer en cualquier punto de la zona sombreada; la zona crítica es una zona de transición, en la que el flujo puede ser laminar, aunque generalmente es turbulento.*

- *La ecuación de Colebrook-White es una familia de curvas, una para cada valor del parámetro ϵ/d que para números de Reynolds bajos, coinciden con las de Blasius y con la primera ecuación de Kàrmàn-Prandtl, es decir, son asintóticas a una u otra ecuación, y se van separando de ellas para valores crecientes del número de Reynolds.*

En algunos casos se puede hacer una primera aproximación tomando un valor de ϵ comprendido entre los límites ($0,02 < \epsilon < 0,03$). Algunos de los valores de ϵ que se necesitan para entrar en este diagrama se pueden tomar de la Tabla IX.1.

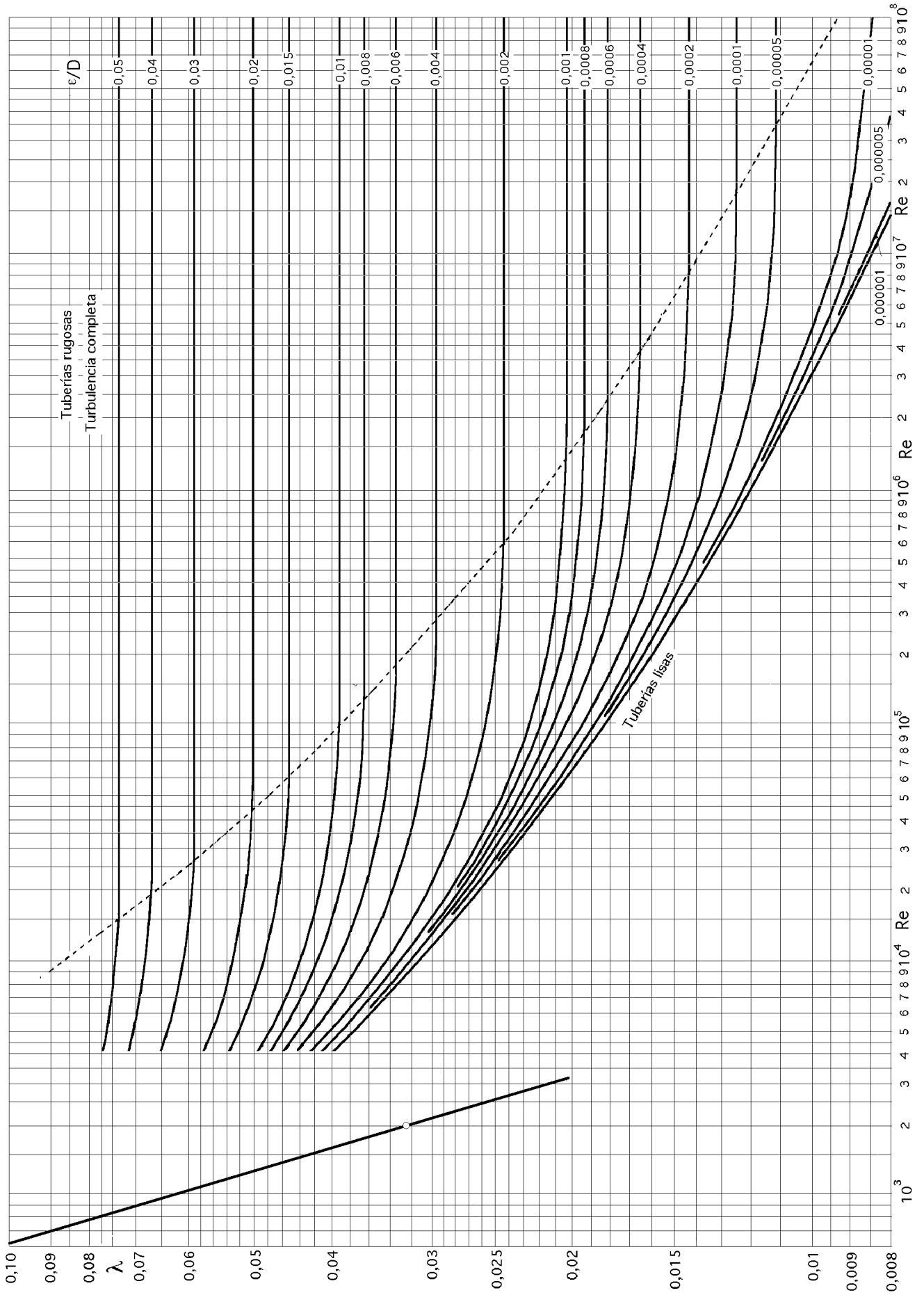


Fig IX.3.- Diagrama de Moody

IX.3.- CALCULO DEL COEFICIENTE DE ROZAMIENTO MEDIANTE ALGUNAS FORMULAS PRACTICAS

El valor de k ha sido estudiado y determinado por muchos autores, pudiéndose considerar en algunos casos constante, y en otros, función de alguna variable; así se presentan una serie de grupos de fórmulas, debidas a determinados autores:

Grupo 1:	= Cte	Dupuit, Chezy,...
Grupo 2:	= f(d)	Darcy, Sonne, Levy, Bazin, Kutter, ...
Grupo 3:	= f(u)	Weisbach, Saint - Venant, Prony, Zeuner, ...
Grupo 4:	= f(d,u) = f(Re)	Flamant, ...
Grupo 5:	= f(Re, $\frac{1}{d}$)	Lang, Mises, ...

2° Grupo.- **FORMULA DE DARCY.**- En esta fórmula:

$$J = \frac{8}{g} \frac{Q^2}{2d^5} = k Q^2$$

El valor de k se puede poner en la forma $k = \frac{1}{C} + \frac{1}{d}$ en la que los valores de C y $\frac{1}{d}$ dependen de las características de la tubería.

Para **tuberías lisas y nuevas**: $C = 0,01989$, $\frac{1}{d} = 0,0005078$

Para **tuberías usadas**, los valores son dobles, es decir: $C = 0,03978$; $\frac{1}{d} = 0,0010106$

Campo de validez para valores de d comprendidos en: $0,004 < d < 0,5$ metros
 $0,25 < u < 2,5$ m/seg

Tabla IX.2.- Valores de J/Q^2 de la fórmula de Darcy, (tubería usada)

Diámetro (m)	Valores de J/Q^2	Diámetro (m)	Valores de J/Q^2	Diámetro (m)	Valores de J/Q^2	Diámetro (m)	Valores de J/Q^2
0,005	---	0,15	50,639	0,31	1,24120	0,47	0,15099
0,01	116.790.000	0,16	36,301	0,32	1,05710	0,48	0,13565
0,02	2.338.500	0,17	26,626	0,33	0,90700	0,49	0,12236
0,027	445.600	0,18	19,836	0,34	0,77783	0,50	0,11039
0,03	250.310	0,19	15,059	0,35	0,67042	0,55	0,06828
0,04	52.561	0,20	11,571	0,36	0,58126	0,60	0,044031
0,05	15.874	0,21	9,0185	0,37	0,50591	0,65	0,029397
0,06	6020,9	0,22	7,1092	0,38	0,44275	0,70	0,020256
0,07	2666,1	0,23	5,6722	0,39	0,38811	0,75	0,014319
0,08	1321,9	0,24	4,5610	0,40	0,34134	0,80	0,010350
0,09	713,81	0,25	3,7052	0,41	0,30112	0,85	0,007620
0,10	412,42	0,26	3,0345	0,42	0,26640	0,90	0,005720
0,11	251,25	0,27	2,5036	0,43	0,23687	0,95	0,003460
0,12	160,01	0,28	2,0836	0,44	0,21076	1,00	0,003360
0,13	105,84	0,29	1,7420	0,45	0,18801	1,10	0,002090
0,14	72,222	0,30	1,4677	0,46	0,16844	1,20	0,001350

Para **conducciones nuevas**, los valores de k son los siguientes:

a) La mitad de lo que diga la Tabla IX.2, si se trata de fundición

b) La tercera parte de lo que diga la Tabla IX.2, si se trata de conducciones de chapa alquitranada.

2° Grupo.- FORMULA DE LEVY.- Para tuberías usadas, el valor de k se define como:

$$k = \frac{k}{1 + 3 \sqrt{r}}, \text{ con, } r, \text{ el radio de la tubería}$$

$$k = 0,09301$$

$$\text{Para tuberías nuevas: } k = \frac{0,02952}{1 + \sqrt{r}}$$

Estas fórmulas dan buenos resultados para: $d > 1$ m, y velocidades medias de hasta 2,5 m/seg.

2° Grupo.- FORMULA DE KUTTER.- Esta fórmula es de aplicación al cálculo de sifones. El valor de k con el que funciona es:

$$k = \frac{8 g}{m + 0,5 \sqrt{d}}$$

en la que los valores de m son:

- 0,25 para tuberías con incrustaciones ordinarias
- 0,30 para tuberías con incrustaciones medias
- 0,35 para tuberías con incrustaciones importantes
- 0,40 para tuberías con incrustaciones formadas rápidamente

4° Grupo.- FORMULA DE FLAMANT

$$\text{En este grupo de fórmulas, } k = \frac{a}{\sqrt[4]{Re}}$$

y, para el caso particular del agua, si se considera $a = \text{Cte}$, se tiene: $k = \frac{a^*}{\sqrt[4]{u d}}$

El valor de k de la expresión, $J = k Q^2$, toma la siguiente forma:

$$k = \frac{16}{2d^5} \frac{1}{\sqrt[4]{u d}}$$

en la que los valores de k dependen de la rugosidad.

Tabla IX.3.- Tabla de valores de k de la fórmula de Flamant

Diámetro (m)		Diámetro (m)		Diámetro (m)	
0,01	4427000	0,22	1,86	0,45	0,062
0,015	645000	0,23	1,51	0,46	0,056
0,02	164500	0,24	1,23	0,47	0,051
0,025	57000	0,25	1,01	0,48	0,046
0,03	24000	0,26	0,84	0,49	0,041
0,04	6100	0,27	0,70	0,50	0,0377
0,05	2100	0,28	0,55	0,52	0,0313
0,06	890	0,29	0,50	0,55	0,0240
0,07	430	0,30	0,43	0,60	0,0158
0,08	227	0,31	0,36	0,65	0,0108
0,09	130	0,32	0,314	0,70	0,0076
0,10	79	0,33	0,271	0,75	0,0055
0,11	50	0,34	0,235	0,80	0,0040
0,12	33	0,35	0,205	0,85	0,0030
0,13	22,6	0,36	0,179	0,90	0,0023
0,14	15,6	0,37	0,157	0,95	0,0018
0,15	11,5	0,38	0,139	1,00	0,0014
0,16	8,4	0,39	0,123	1,05	0,0011
0,17	6,3	0,40	0,107	1,1	0,00089
0,18	4,8	0,41	0,097	1,2	0,00059
0,19	3,8	0,42	0,087	1,3	0,00040
0,20	2,3	0,43	0,077	1,4	0,00028
0,21	2,2	0,44	0,066		

Según sea el material de la tubería se tiene:

- Fundición nueva: = 0,00092
- Fundición usada: = 0,00074
- Chapa: = 0,00062
- Plomo: = 0,00052

El campo de aplicación de esta formulación es el comprendido entre: $1 < d < 3$
 $2000 < Re < 10^5$

5° Grupo.- **FORMULA DE MISES**.- Es una de las más exactas; el valor de k es de la forma:

$$= 0,0096 + 5,7 \sqrt{\frac{k}{d}} + \frac{1,7}{\sqrt{Re}}$$

en la que el valor de k depende del estado y clase de las superficies de contacto de las tuberías, y del líquido que por ellas circula; sus valores se exponen en la Tabla IX.4.

Tabla IX.4.- Valores de k en función del material de la tubería en la fórmula de Mises

Material	$10^6 k$ (en metros)
Vidrio	0,064 a 0,256
Latón, cobre, plomo	0,064 a 0,320
Cemento pulido	2,40 a 4,80
Cemento tosco, sin pulir	6,40 a 16,00
Chapa con asfalto	9,60 a 19,20
Fundición lisa	32 a 64
Fundición oxidada	80 a 160
Chapa remachada	64 a 160
Fundición en servicio, con unión de brida sin resalto	80
Fundición en servicio, con unión de enchufe y cordón	100
Fundición en servicio, para agua sucia con incrustaciones	160

IX.4.- CALCULO GRÁFICO DEL VALOR DE J EN DISPOSICIONES DE TUBOS

En las Fig IX.4.a.b.c, se indica un método gráfico que mediante ábacos permite la determinación del coeficiente J en los siguientes casos de disposición de tubos y chapas:

- a) *Corriente de humos perpendicular a los tubos en quincunce*
- b) *Corriente de humos perpendicular a los tubos en línea (disposición regular)*
- c) *Corriente de humos paralela a los tubos o a las placas, de forma que la distancia entre chapas sea igual a la mitad del diámetro de los tubos.*

Para grandes velocidades el valor de J se calcula para, $u = 10$ m/seg, se halla el factor de corrección para la velocidad deseada y se multiplica el valor de J a 10 m/seg por el factor de corrección, obteniéndose el valor de J a la velocidad deseada.

IX.5.- FLUJO EN CONDUCTOS NO CIRCULARES

FLUJO LAMINAR, INCOMPRESIBLE Y PERMANENTE, ENTRE DOS PLACAS PARALELAS.- En primer lugar se puede suponer que las placas están inclinadas formando un ángulo respecto a la horizontal, teniendo la placa superior una velocidad constante u_0 ; el flujo entre las dos placas fijas es un caso particular, al hacer la velocidad de la placa móvil $u_0 = 0$.

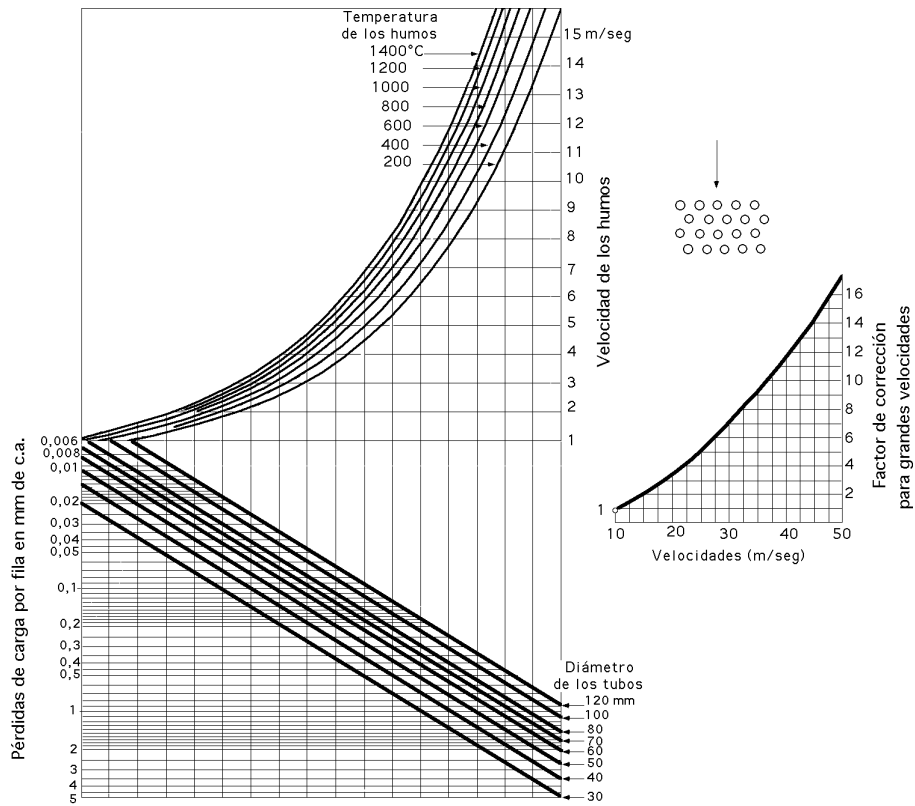


Fig IX.4.a.- Pérdida de carga en mm, por fila de tubos en quince, con humos perpendicular a los tubos. Los resultados obtenidos de la gráfica se tienen que corregir multiplicándolos por $d/0,04$, siendo d el diámetro de los tubos en metros

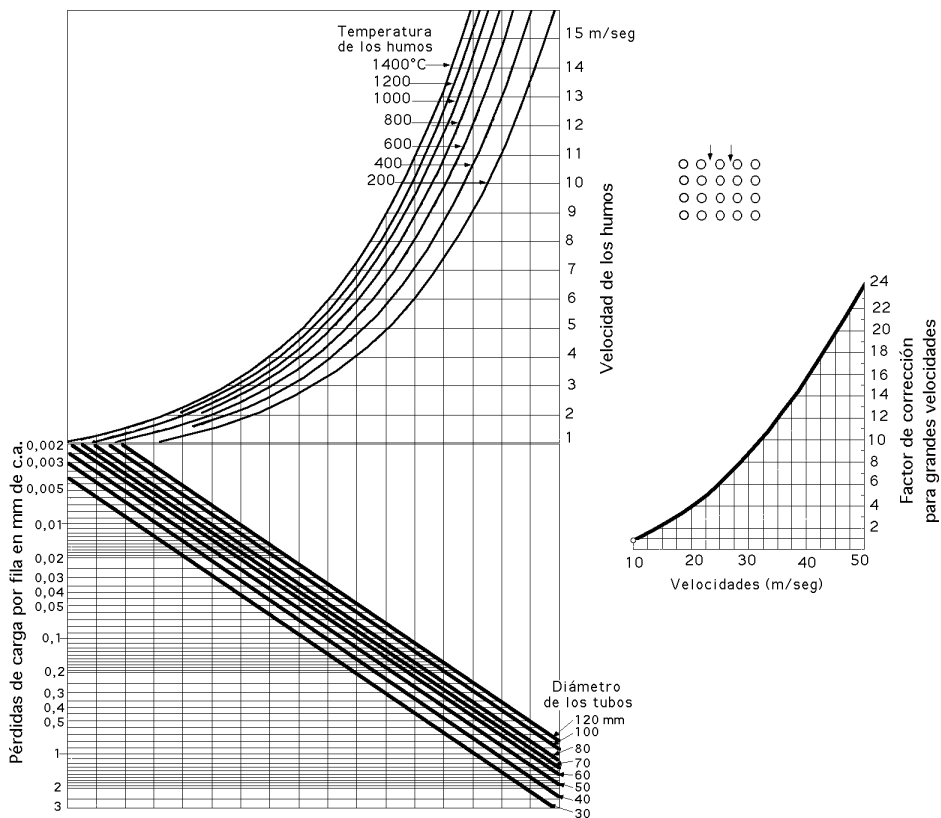


Fig IX.4.b.- Pérdida de carga en mm, por fila de tubos en línea, con humos perpendicular a los tubos. Los resultados obtenidos de la gráfica se tienen que corregir multiplicándolos por $d/0,04$, siendo d el diámetro de los tubos en metros

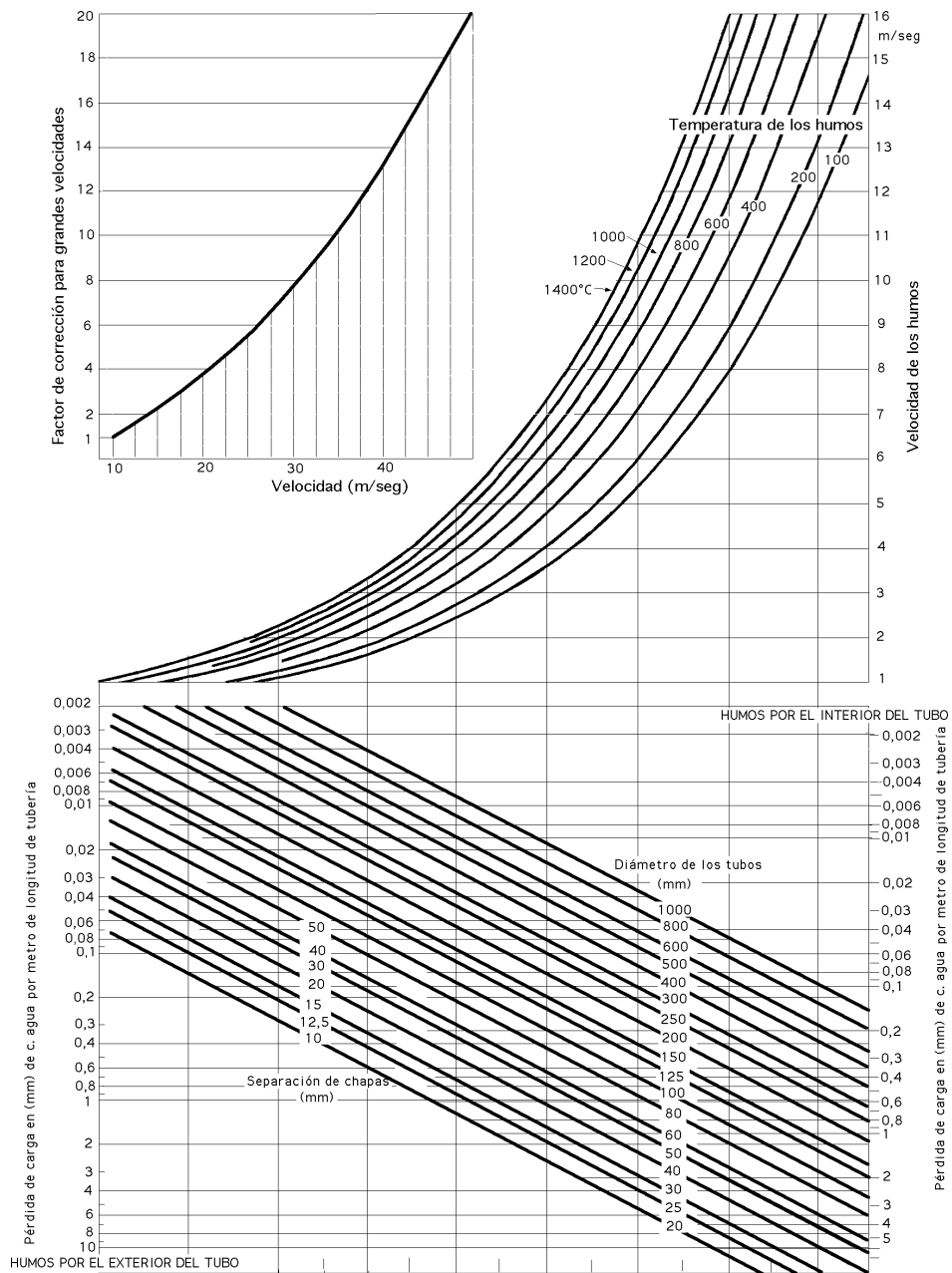


Fig IX.4.c.- Pérdida de carga en mm, por metro lineal de tubo (o de chapa), con corriente paralela a las generatrices

La placa superior se mueve paralelamente en la dirección del flujo, existiendo a lo largo del mismo, en la dirección x , una variación de presión. Si se toma un elemento de fluido en forma de lámina, Fig IX.5, de dimensiones (dx, dy) y anchura unidad, para un flujo permanente, la lámina se moverá con velocidad constante \vec{u} , siendo la ecuación del movimiento:

$$p \, dy - \left(p + \frac{p}{x} dx \right) dy - dx + \left(\frac{p}{y} dy \right) dx + dx \, dy \, \text{sen} = 0$$

que simplificada se reduce a:

$$-\frac{p}{x} + \frac{p}{y} + \text{sen} = 0 \quad ; \quad -\frac{p}{x} + \frac{p}{y} - \frac{h}{x} = 0 \quad ; \quad \frac{p}{y} = \frac{p}{x} (p + h)$$

en las que se ha tenido en cuenta que: $\text{sen} = -\frac{h}{x}$

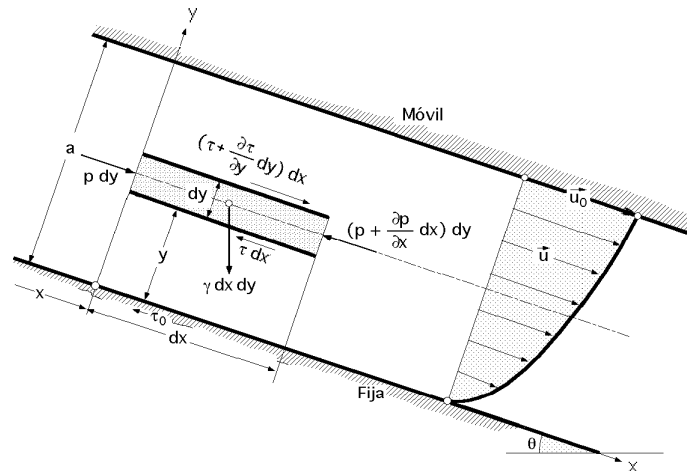


Fig IX.5.- Flujo laminar entre placas paralelas

Como no existe aceleración en la dirección y el segundo miembro de esta ecuación no es función de y ; integrándola se obtiene:

$$= y \frac{1}{x} (p + h) + C_1 = \frac{du}{dy} \quad \frac{du}{dy} = \frac{1}{x} y \frac{1}{x} (p + h) + \frac{C_1}{x}$$

$$u = \frac{1}{2} \frac{1}{x} (p + h) \frac{y^2}{x} + \frac{C_1}{x} y + C_2$$

Para calcular las constantes C_1 y C_2 utilizaremos las condiciones en los límites, de la forma:

Para, $y = 0$, $u = 0$

$$C_2 = 0$$

Para, $y = a$, $u = u_0$

$$u_0 = \frac{1}{2} \frac{1}{x} (p + h) a^2 + \frac{C_1}{x} a \quad \frac{C_1}{x} = \frac{u_0}{a} - \frac{1}{2} \frac{1}{x} (p + h)$$

$$u = \frac{1}{2} \frac{1}{x} (p + h) y^2 + \frac{u_0}{a} y - \frac{1}{2} \frac{1}{x} (p + h) \frac{a}{2} y = \frac{u_0 y}{a} - \frac{1}{2} \frac{1}{x} (p + h) (a y - y^2)$$

El gasto a través de una sección transversal cualquiera, es:

$$Q = \int_0^a u dy = \frac{u_0 a}{2} - \frac{1}{12} \frac{1}{x} (p + h) a^3$$

siendo la velocidad media \hat{u} entre placas:

$$\hat{u} = \frac{Q}{a} = \frac{u_0}{2} - \frac{1}{12} \frac{1}{x} (p + h) a^2$$

y el esfuerzo en la pared:

$$= \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0}^{y=a} = \left\{ y \frac{1}{x} (p + h) + \frac{u_0}{a} - \frac{1}{x} (p + h) \frac{a}{2} \right\}_{y=0}^{y=a} =$$

$$= \frac{1}{x} \left\{ (p + h) \left(y - \frac{a}{2} \right) \right\}_{y=0}^{y=a} + \frac{u_0}{a} = a \frac{1}{x} (p + h) + \frac{u_0}{a}$$

que demuestra que dicho esfuerzo cortante en la pared, es constante.

El caso particular en que las dos placas sean fijas se resuelve haciendo, $u_0 = 0$.

FLUJO LAMINAR INCOMPRESIBLE ENTRE TUBOS CILÍNDRICOS CONCÉNTRICOS.- Para estudiar este tipo de flujo, se puede considerar un conducto en el que se toma una sección anular de fluido de espesor infinitesimal dr , radio r , y longitud dx , en el que el fluido tiene una aceleración nula, y después, como caso particular, aplicarlo al flujo laminar incompresible entre tubos cilíndricos concéntricos.

De acuerdo con la Fig IX.6, la ecuación del movimiento es:

$$2 \pi r dr p - 2 \pi r dr \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) - 2 \pi r dx \tau + 2 \pi (r + dr) \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial r} dr \right) dx + 2 \pi r dr dx \rho a_x = 0$$

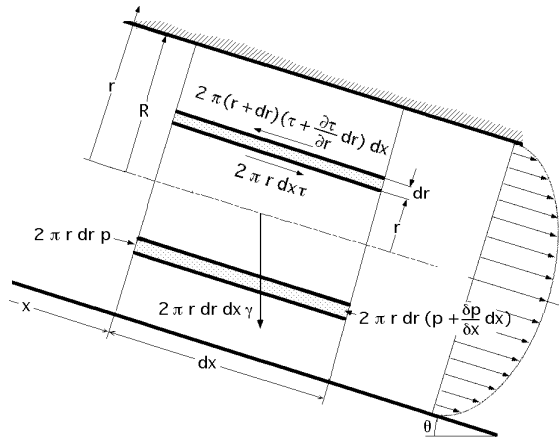


Fig IX.6.- Flujo laminar entre tubos cilíndricos concéntricos

Simplificando y despreciando el término, $2 \frac{\partial \tau}{\partial r} dx dr^2$, resulta:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\tau}{r} + \frac{\partial \tau}{\partial r} + \rho a_x = \left| \tau = -\frac{h}{x} \right| = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\tau}{r} + \frac{\partial \tau}{\partial r} - \frac{h}{x} = 0$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} (p + h) = \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial r}$$

Integrándola:

$$\frac{r^2}{2} \frac{\partial \tau}{\partial r} (p + h) - r = C_1 ; \quad \frac{r^2}{2} \frac{\partial \tau}{\partial r} (p + h) - \frac{du}{dr} r = C_1$$

$$du = \frac{1}{2} \frac{\partial \tau}{\partial r} (p + h) r dr - \frac{C_1}{r} dr \quad u = \frac{1}{4} \frac{\partial \tau}{\partial r} (p + h) r^2 - \frac{C_1}{r} \ln r + C_2$$

Para el caso particular de **flujo entre dos cilindros concéntricos** de radios:

$r = b$, para, $u = 0$, (tubo interior)

$r = R$, para, $u = 0$, (tubo exterior)

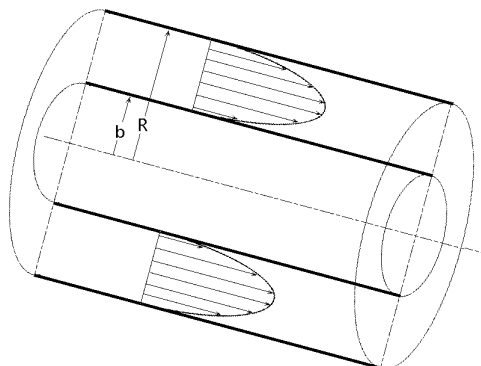


Fig IX.7.- Isotaquia de velocidades para flujos concéntricos

las constantes C_1 y C_2 son de la forma:

$$C_1 = \frac{1}{4} \frac{(p + h)(R^2 - b^2)}{x} \frac{1}{\ln(R/b)}$$

$$C_2 = \frac{1}{4} \frac{(p + h) \{-R^2 + (R^2 - b^2) \frac{\ln R}{\ln(R/b)}\}}{x}$$

y los valores de la velocidad y el caudal:

$$u = \frac{1}{4} \frac{(p + h) \{r^2 - R^2 + (R^2 - b^2) \frac{\ln(R/r)}{\ln(R/b)}\}}{x}$$

$$Q = \int_b^R u \cdot 2\pi r \, dr = \frac{\pi}{8} \left\{ -\frac{(p + h)}{x} \left[R^4 - b^4 - \frac{(R^2 - b^2)^2}{\ln(R/b)} \right] \right\}$$

pudiéndose obtener, a partir de estos resultados, los demás valores que caracterizan este flujo.

IX.6.- DIÁMETRO HIDRÁULICO

Cuando el conducto no tiene sección circular, el análisis del flujo completamente desarrollado se puede considerar análogo al de tubos circulares; en flujo laminar, las ecuaciones de continuidad y de cantidad de movimiento se pueden resolver en forma exacta, mientras que para flujos turbulentos se puede hacer uso de perfiles logarítmicos, aunque resulta mucho más simple utilizar el *diámetro hidráulico*, que permite obtener buenas aproximaciones.

Se define el diámetro hidráulico d_h como la relación:

$$d_h = 4 \frac{\text{Sección transversal mojada}}{\text{Perímetro mojado}}$$

en la que el perímetro mojado viene determinado por todas las superficies sometidas a esfuerzos de fricción.

Para una sección circular se tiene: $d_h = 4 \frac{d^2/4}{d} = d$

y la expresión de la pérdida de carga J por unidad de longitud, en función del diámetro hidráulico d_h :

$$J = \frac{u^2}{d_h} \frac{1}{2g}$$

Para una conducción cuadrada, $d_h = a$

Para una conducción rectangular, $d_h = \frac{2 a h}{a + b}$

Para una conducción triangular, $d_h = \frac{2 a h}{a + b + c}$

Para una conducción formada por dos tubos concéntricos, Fig IX.8:

$$d_h = 4 \frac{\{(d_2^2 - d_1^2)\}/4}{(d_2 + d_1)} = \frac{(d_2 + d_1)(d_2 - d_1)}{d_2 + d_1} = d_2 - d_1$$

Para una conducción tipo intercambiador, formada por varios tubos rodeados por una carcasa exterior, Fig IX.9:

$$d_h = 4 \frac{\{(D^2 - n d^2)\}/4}{(D + n d)} = \frac{D^2 - n d^2}{D + n d}$$

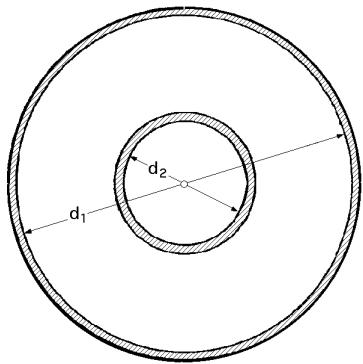


Fig IX.8.- Dos tubos concéntricos

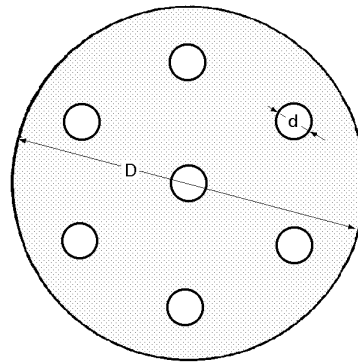


Fig IX.9.- Tubos tipo intercambiador

IX.7.- RESISTENCIA DE FORMA

PERDIDAS ACCIDENTALES EN CONDUCTOS CERRADOS.- Las pérdidas accidentales tienen lugar en los cambios de sección y dirección de la corriente, en las contracciones, ensanchamientos bruscos, curvas, codos, bifurcaciones, o por accesorios instalados en ellas, como diafragmas, llaves, válvulas, etc. Todos ellos originan una perturbación de la corriente que provoca la aparición de remolinos, intensificándose de esta forma las pérdidas de carga, que en algunos casos pueden ser más importantes que las pérdidas continuas, sobre todo en conducciones relativamente cortas.

Se admite que si la conducción tiene una longitud superior a mil veces el diámetro, el error que se comete despreciando las pérdidas accidentales es menor que el que se cometería en el cálculo de P_{acc} para las pérdidas continuas.

Las pérdidas accidentales se pueden expresar por la ecuación:

$$P_{acc} = \frac{u^2}{2g}$$

en la que el coeficiente K se obtiene experimentalmente, teniendo un valor diferente para cada caso, función de las condiciones geométricas del accidente o del contorno, incluida la rugosidad ϵ y el número de Reynolds, aunque en la mayoría de los casos depende sólo del contorno.

El valor de la velocidad \bar{u} se corresponde con el de la velocidad media del fluido si se trata de codos, válvulas, etc, mientras que es la velocidad en la sección menor cuando se trate de ensanchamientos bruscos o contracciones.

Estas pérdidas se pueden calcular también utilizando la misma formulación que se emplea para las pérdidas continuas, sustituyendo en dicha expresión la longitud de la tubería L_g , por otra mayor que comprenda dichas pérdidas en metros de longitud de tubería, por lo que la longitud a utilizar en la fórmula será la longitud geométrica, más la longitud equivalente correspondiente a las pérdidas de carga accidentales ($L = L_g + L_{equiv}$), siendo esta longitud equivalente de la forma:

$$L_{equiv} = \frac{d}{K}$$

Cuando: $10.000 < Re < 20.000$, el valor de K no depende prácticamente del número citado, estando comprendidos en estos márgenes los problemas prácticos de fluidos con poca viscosidad, como el agua y el aire.

TEOREMA DE BELANGUER.- Cuando un fluido que circula por una tubería de sección Ω_1 pasa a otra sección Ω_2 de una forma brusca, Fig IX.10, la sección Ω_1 de la vena fluida se irá ensanchando hasta alcanzar la sección Ω_2 y amoldarse a la tubería.

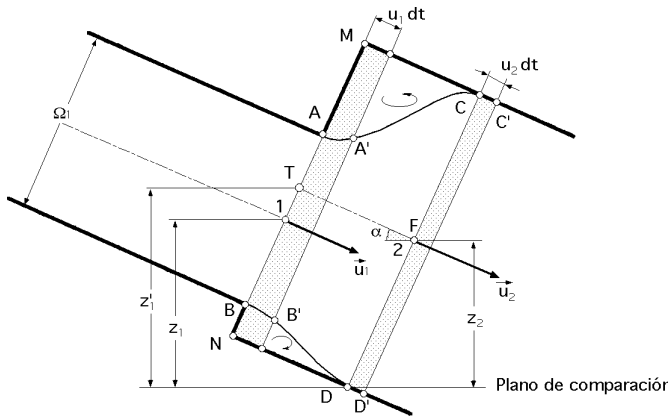


Fig IX.10.- Ensanchamiento brusco

En el volumen de fluido (ABCD), correspondiente a la sección Ω_2 en las zonas comprendidas entre los límites de la sección Ω_1 y los codos en M y N, se forman unos remolinos, mientras que en el resto del citado volumen, se definen perfectamente las líneas de corriente, que tienden a colocarse paralelas a la conducción de sección Ω_2 .

Se podría aplicar entre las secciones 1 y 2 la ecuación de Bernoulli, pero debido al ensanchamiento se desconocen las pérdidas de carga que se originan, las cuales se pueden determinar mediante el Teorema de la Cantidad de Movimiento, pudiéndose considerar que la cantidad de movimiento correspondiente al tramo de fluido contenido en la tubería de sección Ω_2 , es decir, de (MNCD) en adelante, viene determinada por la cantidad de fluido entrante a través de la sección Ω_1 en el tiempo dt; si las zonas de remolinos permanecen prácticamente invariables, la masa fluida (ABCD) se habrá situado en el tiempo dt en la posición (A'B'C'D').

La variación de la cantidad de movimiento, suponiendo flujo incompresible en régimen estacionario, será la diferencia entre las cantidades de movimiento correspondientes a los volúmenes (CDD'C') y (ABB'A'), por lo que tomando como eje de referencia el de la sección Ω_2 se tiene:

La variación de la cantidad de movimiento $\Delta(mu)$ es:

$$\begin{aligned}
 (\Delta mu) &= m_2 u_2 - m_1 u_1 = V_2 u_2 - V_1 u_1 = (u_2 dt \Omega_2) u_2 - (u_1 dt \Omega_1) u_1 = \left[\begin{array}{l} \text{Ec. continuidad} \\ \Omega_1 u_1 = \Omega_2 u_2 \end{array} \right] = \\
 &= u_2 \Omega_2 dt (u_2 - u_1)
 \end{aligned}$$

El impulso mecánico, $F dt$, resulta de multiplicar las fuerzas F que actúan sobre el fluido, por el tiempo considerado dt; estas fuerzas son las debidas al peso F_g y a las presiones F_p las cuales habrá que proyectar sobre el mismo eje de simetría, el de la sección Ω_2 ; así se tendrá:

a) El peso del volumen de fluido (MNCD) proyectado sobre el eje de simetría citado es:

$$F_g = \rho \Omega_2 (MC) \text{ sen } \alpha = \rho \Omega_2 (MC) \text{ sen } \alpha = \rho \Omega_2 \frac{z_1' - z_2}{\text{sen } \alpha} \text{ sen } \alpha = \rho \Omega_2 (z_1' - z_2)$$

b) La resultante de las fuerzas debidas a las presiones F_p se puede obtener considerando que en los puntos T y F se tienen las presiones p_1' y p_2 respectivamente, mediante la diferencia entre las fuerzas que actúan sobre la cara (MN) y las que actúan sobre la cara (CD) en el sentido del movimiento es decir:

$$F_p = p_1' \cdot z_2 - p_2 \cdot z_1 = z_2 (p_1' - p_2) = \left[\frac{p_1'}{z_1' + z_1} + z_1' = \frac{p_1}{z_1} + z_1 \right] = z_2 \{p_1 - p_2 - (z_1' - z_1)\}$$

y la fuerza F total debida al peso y a las presiones:

$$F = F_p + F_g = z_2 \{ (z_1 - z_2) + (p_1 - p_2) \}$$

que multiplicada por dt e igualada a la que proporciona la variación de la cantidad de movimiento, permite obtener:

$$z_2 u_2 dt (u_2 - u_1) = z_2 (z_1 - z_2) + z_2 (p_1 - p_2) dt$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho} - (z_2 + \frac{p_2}{\rho}) = \frac{u_2}{g} (u_2 - u_1) = \frac{2 u_2^2 - 2 u_1 u_2}{2 g} + \frac{u_1^2}{2 g} - \frac{u_1^2}{2 g} = \frac{(u_2 - u_1)^2}{2 g} - \frac{u_1^2}{2 g} + \frac{u_2^2}{2 g}$$

que se puede poner en la forma:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2 g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2 g} + \frac{(u_2 - u_1)^2}{2 g}$$

y que comparada con la de Bernoulli, permite obtener la expresión de la pérdida de carga para el ensanchamiento brusco, que se conoce como fórmula de Belanger:

$$P_{acc} = \frac{(u_2 - u_1)^2}{2 g}$$

Teniendo en cuenta que, $u_1 = \frac{2}{1} u_2$, sustituyendo en P_{acc} resulta:

$$P_{acc} = \frac{(\frac{2}{1} - 1)^2}{2 g} u_2^2 = \frac{u_2^2}{2 g}$$

Si el líquido que llega por la tubería de sección A_1 desemboca en un gran depósito ($u_2 = 0$) el valor de P_{acc} es:

$$P_{acc} = \frac{u_1^2}{2 g} = 1$$

PERDIDA DE CARGA EN ENSANCHAMIENTO BRUSCO.- La pérdida de carga en ensanchamiento brusco, según el teorema de Belanger, es de la forma:

$$P_{acc} = \frac{(u_2 - u_1)^2}{2 g} = \frac{\{(\frac{A_2}{A_1} - 1)\}^2}{2 g} u_2^2 = \frac{u_2^2}{2 g}$$

$$= \frac{\{(\frac{A_1}{A_2} - 1)\}^2}{2 g} u_1^2 = \frac{u_1^2}{2 g}$$

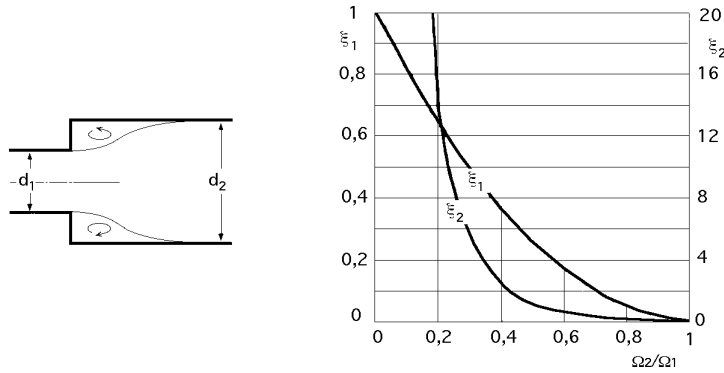


Fig IX.11.- Pérdida de carga en ensanchamiento brusco

PERDIDA DE CARGA EN ENSANCHAMIENTO GRADUAL.- En este caso, la determinación del coeficiente de pérdida de carga no es tan sencilla, pudiéndose poner de acuerdo con la Fig IX.12 en la forma:

$$= m \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2$$

La pérdida de carga es: $P_{acc} = m \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{u_1^2}{2g}$

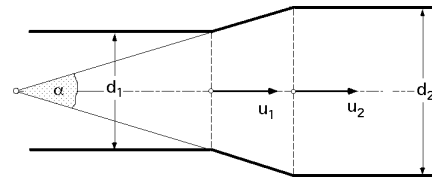


Fig IX.12

Tabla IX.3

	2,5	5	7,5	10	15	20	25	30
m	0,18	0,13	0,14	0,16	0,27	0,43	0,62	0,81

viniendo dados los valores de m en la Tabla IX.3

PERDIDA DE CARGA POR CONTRACCIÓN BRUSCA DE LA SECCIÓN.- Si el fluido pasa de la sección 1 a la sección 2, experimenta una contracción e inmediatamente después un ensanchamiento, Fig IX.13.a.b.c. Las pérdidas en la contracción, sección A, son prácticamente despreciables y sólo habrá que tener en cuenta las pérdidas originadas en la expansión posterior, entre las secciones A y 2.

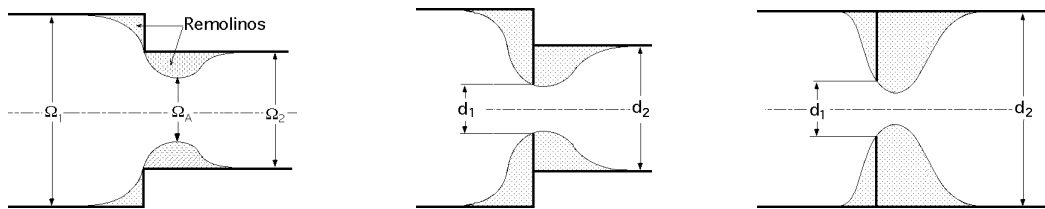


Fig IX.13.a.b.c.

Si llamamos μ al valor de la relación entre las secciones A y 2, que no es más que un coeficiente de contracción, y teniendo en cuenta la ecuación de continuidad entre ambas secciones, resulta:

$$\mu = \frac{A}{2} = \frac{u_2}{u_A} \quad u_A = \frac{u_2}{\mu}$$

que sustituida en la ecuación de Belanguer, permite obtener:

$$P_{acc} = \frac{(u_A - u_2)^2}{2g} = \frac{\left(\frac{u_2}{\mu} - u_2\right)^2}{2g} = \left(\frac{1}{\mu} - 1\right) \frac{u_2^2}{2g} = \frac{u_2^2}{2g}$$

Se pueden eliminar las pérdidas utilizando tubos progresivos de forma que la tubería se adapte a la vena fluida; de esta forma se puede llegar a obtener valores de μ comprendidos entre 0 y 0,05

Según Weisbach, μ toma los valores que se indican en las Tablas IX.4 y 5:

Tabla IX.4.- Para el caso a

$\frac{2}{r} - 1$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
μ	0,5	0,48	0,45	0,41	0,36	0,29	0,21	0,13	0,07	0,01	0

Tabla IX.5.- Para los casos b y c

$\frac{2}{r} - 1$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
(b)		231,7	51	19,8	9,6	5,16	3,08	1,88	1,17	0,74	
(c)		225,9	47,8	30,8	7,8	3,75	1,8	0,8	0,29	0,06	

PERDIDA DE CARGA EN CURVAS.- Es difícil determinar teóricamente estas pérdidas debido a que las líneas de corriente dejan de ser paralelas al eje de la conducción, presentándose circulaciones secundarias, tal como se muestra en la Fig IX.14. En la región A se forman torbellinos y en la B se estrecha la sección de la vena, seguida de una expansión, siendo éstas las principales causas de las pérdidas de carga. Una ecuación que permite calcular el valor de μ propuesta por Navier, es de la forma:

$$\mu = (0,00019 + 0,0009 R) \frac{S}{R^2}$$

en la que S es la longitud del arco medio, correspondiente al cambio de dirección y R es el radio de curvatura; el valor de las pérdidas de carga $P_{(accid)}$ es:

$$P_{acc} = (0,00019 + 0,0009 R) \frac{S}{R^2} \frac{u^2}{2g}$$

El valor de μ se puede determinar también en función de la relación R/r, siendo r el radio de la conducción. Para tubería circular, Weisbach propone los valores de la Tabla IX.6:

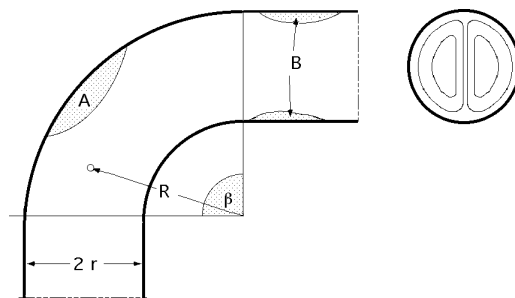


Fig IX.14

Tabla IX.6

r/R	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
		0,13	0,14	0,16	0,2	0,29	0,43	0,67	0,98	1,37	11,95

Otras expresiones propuestas al respecto son:

Weisbach,

$$= \frac{1}{90} \{0,131 + 0,163 \left(\frac{r}{R}\right)^{3,5}\}, \text{ para, } 30^\circ < \beta < 180^\circ$$

$$= \frac{1}{90} \{0,131 + 0,848 \left(\frac{r}{R}\right)^{3,5}\}, \text{ para, } 1 < \frac{R}{r} < 5$$

$$= \frac{1}{90} \{0,131 + 0,848 \left(\frac{r}{R}\right)^{3,5}\}, \text{ para, } \frac{R}{r} \gg$$

Saint-Venant: $f = 0,138 \frac{L}{R} \sqrt{\frac{r}{R}}$

Kauffman: $f = 0,276 \frac{L}{R} \sqrt{\frac{r}{R}}$

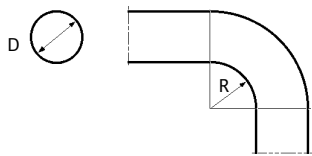
En este tipo de accidente, se presentan dos formas de pérdidas:

- a) Las debidas a la fuerza centrífuga, lo que supone la aparición de un flujo secundario que se superpone al flujo principal y que intensifica el rozamiento.
- b) Las producidas por la separación en A y por el estrechamiento en B.

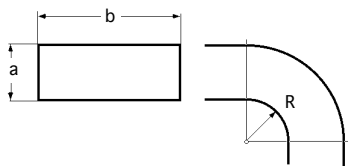
PERDIDA DE CARGA EN CODOS.- En este caso se presentan pérdidas semejantes a las ya citadas para curvas. Para conductos circulares Weisbach propone la siguiente ecuación:

$$= 0,9457 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + 2,047 \operatorname{sen}^4 \frac{\alpha}{2}$$

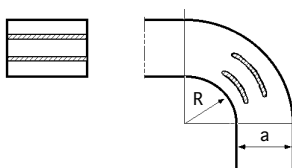
siempre que $\alpha < 90^\circ$ y números de Reynolds mayores de 200.000. Para: $\alpha = 90^\circ$, el valor de $f = 1$.



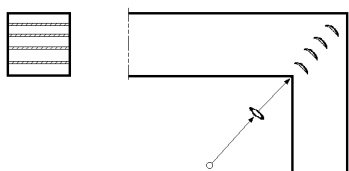
R/D	0	0,25	0,5	1
	0,8	0,4	0,25	0,15



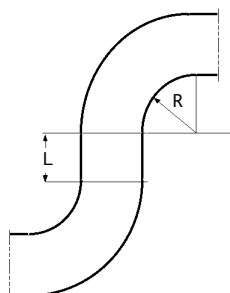
R/a	b/a = 1	b/a = 2	b/a = 3	b/a = 4
0	1,00	0,90	0,80	0,73
0,25	0,40	0,40	0,39	0,32
0,5	0,20	0,20	0,18	0,16
1	0,13	0,13	0,13	0,10



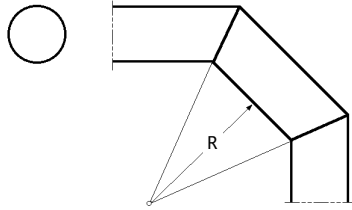
Nº de álabes	1	2	3
R/a	0,25	0,20	0,15
	0,15	0,12	0,10



$R_2 = R_1/2 =$	$= 0,1$	2	3
R/a	0,25	0,20	0,15
	0,15	0,12	0,10



L = 0	$= 0,62$
L = D	$= 0,68$



R/d	0,25	0,5	3
Codo de 3 piezas	0,80	0,40	0,30
Codo de 5 piezas	0,50	0,30	0,20

PERDIDAS POR BIFURCACIONES

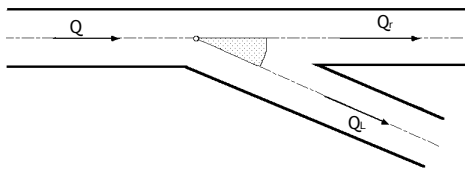
Las bifurcaciones pueden ser de dos tipos:
 a) De divergencia
 b) De confluencia

Hay que calcular por separado las pérdidas correspondientes al caudal del tramo recto principal Q_r que no cambia de dirección, y al caudal lateral Q_L mediante las expresiones:

$$P_{acc)_{rL}} = 1 \frac{u_1^2}{2g} ; \quad P_{acc)_{rr}} = 2 \frac{u_2^2}{2g}$$

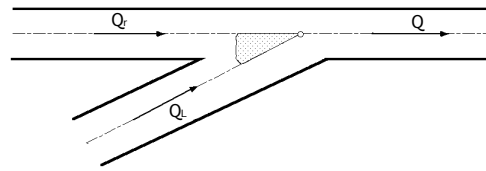
Si los conductos tienen el mismo diámetro, pueden suceder dos casos, según la corriente principal se divida en otras dos, o se reúnan dos corrientes en una sola, tal como se indica a continuación.

a) Divergencia, (la corriente se divide en dos)



	90°	45°
	0,50	0,25

b) Convergencia, (se reúnen dos corrientes)

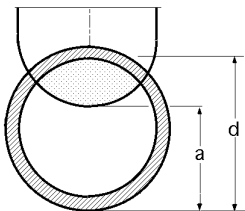


	90°	45°
	1,00	0,50

PERDIDA DE CARGA EN VÁLVULAS.- El coeficiente de pérdida de carga, depende de los siguientes factores:

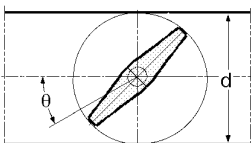
- a) Tipo de válvula (compuerta, mariposa, etc)
- b) Del diseño particular de cada una
- c) Del grado de apertura correspondiente a cada válvula

Weisbach propone los siguientes valores experimentales:



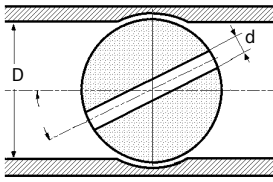
VÁLVULA DE COMPUERTA

a/d	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8	1
	89,10	17,00	7,60	2,10	0,81	0,26	0,07	0



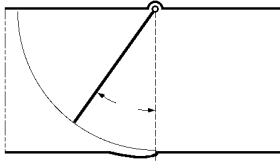
VÁLVULA MARIPOSA

	5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	90°
	0,20	0,50	1,50	3,90	10	32	118	751	



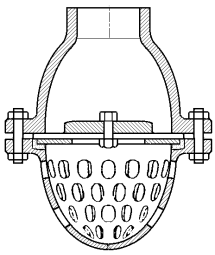
VÁLVULA CILÍNDRICA

	5°	10°	15°	20°	25	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	90°
	0,05	0,30	0,8	1,60	3,1	5,50	9,7	17,3	31,2	52,6	106	206	486	



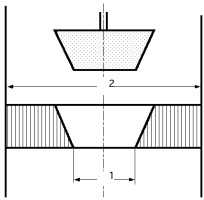
VÁLVULA DE RETENCIÓN

	10°	15°	20°	25°	30°	40°	50°	60°	65°
	5,20	3,10	2,4	2,10	2	1,80	1,7	1,5	1,2



VÁLVULA ALCACHOFA

D (mm)	40	50	65	80	100	125	150	200	250	300	350	400	450	500
	12,0	10,0	8,8	8,0	7,0	6,5	6,0	5,2	4,4	3,7	3,4	3,1	2,8	2,5



VÁLVULA CÓNICA

Se toma: $= 1,645 \frac{2}{1} - 1$

ABACO PARA LA DETERMINACIÓN DE LAS PERDIDAS DE CARGA EN ACCESORIOS
en metros de longitud de tubería equivalente

