

VIII.- TEORÍA ELEMENTAL DE LA CAPA LIMITE BIDIMENSIONAL

VIII.1.- CAPA LIMITE LAMINAR Y TURBULENTA EN FLUJO SOBRE PLACA PLANA

En el movimiento de fluidos sobre una placa plana, la Hidrodinámica clásica se limita a imponer, como condición de contorno, la tangencia del vector velocidad, mientras que la Mecánica de Fluidos viscosos exige la condición adicional de adherencia al contorno de la placa, que es mucho más restrictiva que la de tangencia. En los fluidos poco viscosos, los esfuerzos tangenciales son, con frecuencia, muy inferiores a los de inercia o a los de gravedad, pero ésto no autoriza a prescindir de los esfuerzos viscosos, que pueden llegar a ejercer una influencia considerable sobre la configuración del movimiento.

Prandtl, en 1904, propone que el estudio del movimiento de un fluido de viscosidad pequeña, se podía asimilar al de un fluido perfecto, salvo en una capa próxima al contorno, de espesor δ , en la que concentraba los fenómenos de fricción, y que llamó *capa límite*; en el exterior de dicha capa, las tensiones tangenciales son despreciables, predominando las fuerzas de inercia sobre las de viscosidad, mientras que en el interior de la capa límite, la proximidad del contorno hace que el gradiente de velocidades sea muy grande y, por lo tanto, que la tensión tangencial $\tau = \mu \frac{du}{dy}$ sea también muy grande; en esta situación las fuerzas de fricción son del mismo orden de magnitud que las fuerzas de inercia.

El espesor δ de la capa límite puede estar comprendido entre unas pocas moléculas y algunos milímetros, según los casos; fuera de la capa límite se pueden utilizar las ecuaciones de Euler o métodos experimentales basados en las líneas y redes de corriente, que una vez configuradas alrededor del contorno o perfil deseado, permiten obtener el campo de velocidades y la distribución de presiones correspondiente.

En el estudio de la capa límite hay que tener presentes las siguientes consideraciones:

a) Aunque la perturbación producida por la fricción se propaga a todo el fluido, se admite que la propagación queda limitada a una zona del mismo espesor finito δ , en sentido normal al contorno.

b) La forma de la curva de distribución de velocidades en las distintas secciones a lo largo de la capa límite, se puede expresar, en general, mediante las siguientes ecuaciones, Fig VIII.1:

Régimen laminar: $\frac{u}{V_0} = C + C_1 \left(\frac{y}{Y}\right) + C_2 \left(\frac{y}{Y}\right)^2 + C_3 \left(\frac{y}{Y}\right)^3 + \dots$

Régimen turbulento: $\frac{u}{V_0} = \sqrt{\frac{y}{Y}}$

en la que V_0 es la velocidad uniforme del fluido no perturbado; la capa límite en su desarrollo longitudinal, muestra una tendencia progresiva al ensanchamiento, Fig VIII 1.b.

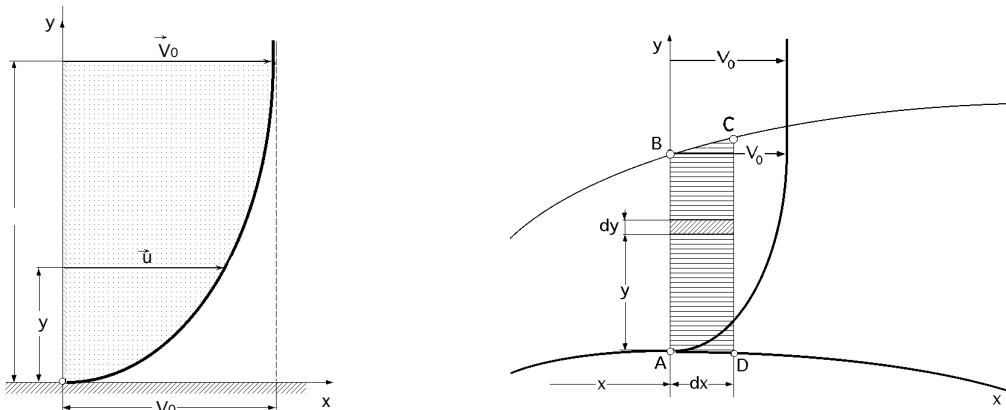


Fig VIII.1.a.b.- Capa límite

POLINOMIO DE SEGUNDO GRADO.- Si la distribución de velocidades es de la forma:

$$\frac{u}{V_0} = C + C_1 \left(\frac{y}{Y}\right) + C_2 \left(\frac{y}{Y}\right)^2$$

Para: $y = 0, u = 0 \quad C = 0$

con las condiciones:

Para: $y = Y, u = V_0 \quad 1 = C_1 + C_2 ; \quad \frac{u}{Y} \Big|_{y=Y} = 0$

$$\frac{1}{V_0} \frac{u}{Y} \Big|_{y=Y} = \left(\frac{C_1}{Y} + \frac{2 C_2 y}{2} \right) \Big|_{y=Y} = \frac{C_1}{Y} + \frac{2 C_2}{2} = 0 \quad C_1 + 2 C_2 = 0$$

$$C_1 + C_2 = 1$$

$$C_1 = 2 ; C_2 = -1$$

$$C_1 + 2 C_2 = 0$$

y la forma del perfil de la distribución de velocidades de la capa límite, en régimen laminar, con un polinomio de segundo grado, sería:

$$\frac{u}{V_0} = \frac{2 y}{Y} - \left(\frac{y}{Y}\right)^2$$

POLINOMIO DE TERCER GRADO.- Si el polinomio es de tercer grado:

$$\frac{u}{V_0} = C + C_1 \left(\frac{y}{Y}\right) + C_2 \left(\frac{y}{Y}\right)^2 + C_3 \left(\frac{y}{Y}\right)^3$$

Para: $y = 0, u = 0 \quad C = 0$

con las condiciones:

Para: $y = Y, u = V_0 \quad 1 = C_1 + C_2 + C_3 ; \quad \frac{u}{Y} \Big|_{y=Y} = 0$

$$\frac{1}{V_0} \frac{u}{Y} \Big|_{Y=0} = \left\{ \frac{C_1}{Y} + \frac{2 C_2}{Y^2} \left(\frac{Y}{Y}\right) + \frac{3 C_3 Y}{Y^2} \left(\frac{Y}{Y}\right)^2 \right\}_{Y=0} = 0 \quad C_1 + 2 C_2 + 3 C_3 = 0$$

Para: $Y = 0$; $\frac{2u}{Y^2} \Big|_{Y=0} = 0$ $\frac{1}{V_0} \frac{2u}{Y^2} \Big|_{Y=0} = \left\{ 0 + \frac{2 C_2}{2} + \frac{6 C_3}{2} \left(\frac{Y}{Y}\right) \right\}_{Y=0} = 0 \quad C_2 = 0$

$$C_1 + C_2 + C_3 = 1$$

$$C_1 + 2 C_2 + 3 C_3 = 0 \quad C_1 = \frac{3}{2} ; C_2 = 0 ; C_3 = -\frac{1}{2}$$

$$C_2 = 0$$

y la forma del perfil de la distribución de velocidades de la capa límite, en régimen laminar, con un polinomio de tercer grado, sería:

$$\frac{u}{V_0} = \frac{3 Y}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{Y}\right)^2$$

La experiencia ha permitido comprobar, para placa plana, que el movimiento laminar en la capa límite llega a hacerse inestable cuando se sobrepasa un valor crítico del número de Reynolds:

$$Re_c = \frac{V_0 x_c}{\nu}$$

siendo x_c la distancia a partir del borde de ataque de la placa.

La capa límite continua su desarrollo, como se muestra en la Fig VIII.2; a partir de x_c , se origina la capa límite turbulenta, que se divide en dos subcapas, una de las cuales, en las proximidades de la placa, permite definir una delgada subcapa marcadamente laminar.

Los valores críticos del número de Reynolds que definen la transición, para *placa plana*, son:

$$Re_{laminar} < 5.10^5 ; Re_{turbulento} > 3.10^6$$

Para fluidos que circulan entre dos paredes próximas, el ensanchamiento progresivo de la capa límite de cada contorno determina que éstas se unan, a una cierta distancia de la entrada, desapareciendo la zona en que el movimiento podía ser asimilable a un fluido perfecto, para realizarse todo él bien en régimen laminar, o bien en régimen turbulento, según el valor del número de Reynolds.

En tuberías sólo se puede considerar el movimiento como irrotacional, en las proximidades de la embocadura; con flujo totalmente desarrollado, no.

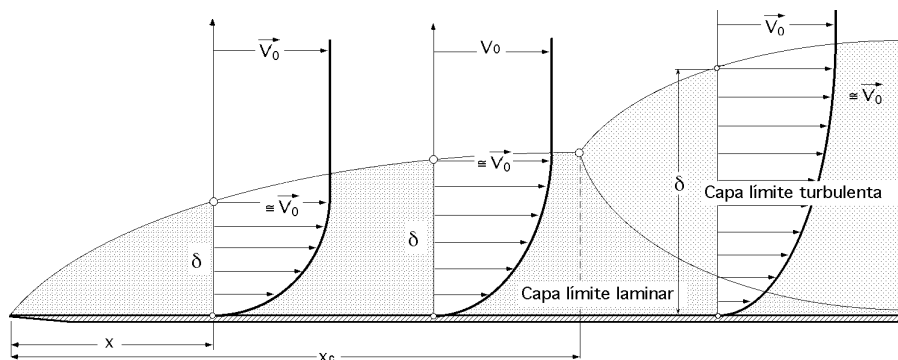


Fig VIII.2.- Desarrollo de la capa límite laminar

VIII.2.- ESPESORES Y CAUDALES DE LA CAPA LIMITE

Mediante el concepto de capa límite es posible concentrar en un espesor los fenómenos de fricción; ello implica el que se tengan que cumplir las siguientes condiciones:

a) El valor de la velocidad \bar{u} correspondiente a ($y = \delta_1$) tiene que estar muy próximo a \bar{V}_0 , pues entonces el gradiente de velocidades será despreciable; suele tomarse, $u = 0,99 V_0$.

b) El esfuerzo de fricción evaluado en la zona de espesor δ_1 , (a lo largo del contorno), mediante la ecuación de la cantidad de movimiento, tiene que coincidir con el obtenido analíticamente para la capa límite laminar, o con el deducido experimentalmente en la capa límite turbulenta.

En ambas situaciones la distribución de velocidades viene dada, para el régimen laminar, por polinomios de grado m (parábolas de segundo o tercer grado en general) y para el régimen turbulento por polinomios de grado $(1/m)$.

Espesor de desplazamiento de la capa límite.- El espesor de desplazamiento de la capa límite δ_1 está basado en la conservación del caudal a lo largo de la normal al contorno, mediante la equivalencia de las áreas rayadas, como se indica en la Fig VIII.3.

Si se admite que la ley de velocidades es asintótica a \bar{V}_0 :

$$\delta_1 = \frac{1}{V_0} \int_0^{\delta_1} (V_0 - u) dy$$

y si la ley de distribución de velocidades alcanza el valor \bar{V}_0 para el espesor δ , se tiene:

$$\delta_1 = \frac{1}{V_0} \int_0^{\delta} (V_0 - u) dy = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) dy = \delta - \int_0^{\delta} \frac{u}{V_0} dy = \delta - \frac{q}{V_0}$$

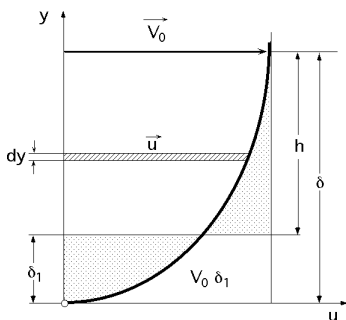


Fig VIII.3.- Espesor de desplazamiento de la capa límite

que se puede interpretar como la diferencia entre el espesor δ y el espesor δ_1 de una corriente que tuviese la misma velocidad V_0 que la corriente exterior y transportase la misma masa de fluido (caudal q) que la capa límite real.

Considerando capa límite turbulenta: $\frac{u}{V_0} = \sqrt[m]{\frac{y}{\delta}}$, resulta:

$$\delta_1 = \delta - \int_0^{\delta} \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/m} dy = \delta - \frac{1}{1/m} \int_0^{\delta} y^{1/m} dy = \frac{m}{m+1} \delta$$

Espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite.- El espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite δ_2 se define en la forma:

$$\delta_2 = \frac{1}{V_0^2} \int_0^{\delta} u (V_0 - u) dy = \int_0^{\delta} \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) dy$$

y se corresponde con el espesor de una corriente fluida que tenga la misma velocidad V_0 que la corriente exterior, y la misma variación de la cantidad de movimiento que la debida a la fuerza de arrastre de la capa límite real.

Considerando: $\frac{u}{V_0} = \sqrt[m]{\frac{y}{\delta}}$, resulta:

$$\delta_2 = \int_0^{\delta} \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/m} \left\{1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/m}\right\} dy = \frac{1}{2/m} \int_0^{\delta} y^{1/m} \left(1 - y^{1/m}\right) dy = \frac{m}{(m+1)(m+2)}$$

La relación entre el espesor de desplazamiento δ_1 y el espesor de la cantidad de movimiento de la capa límite δ_2 , se denomina Factor de forma del perfil F; para una placa plana, en función de m se tiene:

$$F = \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\frac{1}{(m+1)}}{\frac{m}{(m+1)(m+2)}} = \frac{m+2}{m}$$

Un valor elevado del factor de forma del perfil implica que está próximo a producirse el desprendimiento de la capa límite.

Espesor de energía de la capa límite.- El espesor de energía de la capa límite δ_3 se define en la forma:

$$\delta_3 = \frac{1}{V_0^3} \int_0^{\delta} u (V_0^2 - u^2) dy = \int_0^{\delta} \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u^2}{V_0^2}\right) dy = \int_0^{\delta} \frac{u}{V_0} = \sqrt[m]{\frac{y}{\delta}} = \int_0^{\delta} \sqrt[m]{\frac{y}{\delta}} \left\{1 - \sqrt[m]{\left(\frac{y}{\delta}\right)^2}\right\} dy = \frac{2m}{(m+1)(m+2)}$$

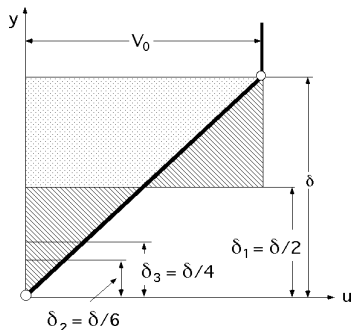


Fig VIII.4.- Espesores de la capa límite en distribución triangular

Para hacernos una idea del orden de magnitud y del significado, de los diversos espesores de la capa límite así definidos, indicamos en la Fig VIII.4, para el caso particular de una distribución de velocidades triangular ($m = 1$), el orden de magnitud de los mismos, de la forma:

$$\delta_1 = \frac{\delta}{2} ; \quad \delta_2 = \frac{\delta}{6} ; \quad \delta_3 = \frac{\delta}{4}$$

Caudal de la capa límite.- El caudal q a través de la capa límite se ha definido en la forma:

$$q = \int_0^{\delta} u dy$$

Teniendo en cuenta el espesor de desplazamiento δ_1 resulta:

$$\delta_1 = \int_0^{\delta} dy - \int_0^{\delta} \frac{u dy}{V_0} = \delta - \int_0^{\delta} \frac{u dy}{V_0} ; \quad \delta_1 = \int_0^{\delta} \frac{u dy}{V_0} = \frac{q}{V_0} \quad q = V_0 (\delta - \delta_1) = V_0 \frac{m}{m+1}$$

Caudal de la cantidad de movimiento de la capa límite.- El caudal de la cantidad de movimiento de la capa límite q_M se define en la forma:

$$q_M = \int_0^{\delta} u^2 dy = V_0^2 \int_0^{\delta} \left(\frac{u}{V_0}\right)^2 dy = q \frac{m}{m+1}$$

Teniendo en cuenta la expresión del espesor de la cantidad de movimiento δ_2 se obtiene:

$$2 = \int_0^{\delta} \frac{u}{V_0} \left\{ 1 - \frac{u}{V_0} \right\} dy = \int_0^{\delta} \frac{u}{V_0} dy - \int_0^{\delta} \frac{u^2}{V_0^2} dy = \delta - \int_0^{\delta} \frac{u^2}{V_0^2} dy$$

$$\int_0^{\delta} u^2 dy = (\delta - 1 - 2) V_0^2$$

quedando la expresión del caudal de la cantidad de movimiento en la forma:

$$Q_M = \int_0^{\delta} u^2 dy = (\delta - 1 - 2) V_0^2 = V_0^2 \frac{m}{m + 2}$$

función del espesor δ de la capa límite, del espesor de desplazamiento δ_1 y del espesor de la cantidad de movimiento δ_2 .

VIII.3.- ECUACIÓN INTEGRAL DEL IMPULSO DE LA CAPA LIMITE

CAUDAL DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO.- Como consecuencia de la viscosidad del fluido y de su deformación, aparece un esfuerzo tangencial sobre el contorno de la placa que determina lo que se conoce como *Resistencia de Superficie o de Forma*. Para calcular este esfuerzo se aplica el Teorema de la Cantidad de movimiento al volumen de fluido comprendido en el interior de la capa límite entre las secciones (AB) y (DC) de la Fig VIII.5. Como el movimiento irrotacional exterior a la capa límite es uniforme, no existe gradiente de presiones y, al expresar el equilibrio, la única fuerza actuante es la de arrastre sobre la placa, de la forma $\tau_0 dx$.

Para una anchura de placa unidad, el caudal de la cantidad de movimiento se evalúa como sigue:
Sobre la sección (AB), el caudal de la cantidad de movimiento entrante es:

$$Q_{M(AB)} = \int_0^{\delta} u^2 dy = Q_M$$

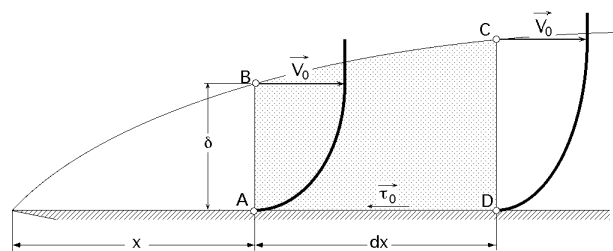


Fig VIII.5.- Volumen de fluido en la capa límite

Sobre la sección (CD), el caudal de la cantidad de movimiento saliente es:

$$Q_{M(CD)} = Q_M + \frac{dQ_M}{dx} dx = Q_M + \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta} u^2 dy \right) dx$$

por lo que en el volumen (ABCD) se tiene una variación del caudal de la cantidad de movimiento, $Q_{M(AB)} - Q_{M(CD)}$, en la forma:

$$\frac{dQ_M}{dx} dx = - \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta} u^2 dy \right) dx$$

Sobre el contorno (BC) no existe ningún tipo de esfuerzo cortante porque está fuera de la capa lími-

te, ($du/dy = 0$); teniendo en cuenta que sobre este contorno la velocidad es V_0 , el caudal de la cantidad de movimiento entrante por (BC) se obtiene en la forma:

$$Q_{M(B)} = m V_0 = \rho \int_0^y V_0 u \, dy$$

$$Q_{M(C)} = Q_{M(B)} + \frac{Q_{M(B)}}{x} \, dx = Q_{M(B)} + V_0 \frac{1}{x} \left(\int_0^y u \, dy \right) dx$$

por lo que:

$$Q_{M(BC)} = V_0 \frac{1}{x} \left(\int_0^y u \, dy \right) dx$$

Sobre el contorno (AD) de contacto con la placa no hay caudal saliente de la cantidad de movimiento.

FUERZA DE ARRASTRE..- Igualando el caudal de la cantidad de movimiento con la fuerza de arrastre F_a sobre la placa en dx , y aplicando el Teorema del Impulso se obtiene:

$$\rho \int_0^y u \, dy \, dx = - \frac{1}{x} \int_0^y (u^2 \, dy) \, dx + V_0 \frac{1}{x} \int_0^y (u \, dy) \, dx = \frac{1}{x} \left\{ \int_0^y u (V_0 - u) \, dy \right\} dx$$

$$F_a = \rho \int_0^y u (V_0 - u) \, dy = V_0^2 \int_0^y \frac{C_w x}{2} \frac{V_0^2}{2} \, dy, \text{ con: } \rho \int_0^y u (V_0 - u) \, dy = \frac{C_w x}{2} \frac{V_0^2}{2}$$

$$\rho \int_0^y u (V_0 - u) \, dy = \frac{1}{x} \left\{ \int_0^y u (V_0 - u) \, dy \right\} \quad ; \quad \frac{1}{y} \int_0^y u (V_0 - u) \, dy = \frac{1}{x} \left\{ \int_0^y u (V_0 - u) \, dy \right\}$$

en la que $\int_0^y u (V_0 - u) \, dy = \frac{C_w x}{2}$ se deduce comparándola con la obtenida por análisis dimensional; los valores de C_w se obtienen mediante formulación, ábacos y tablas.

a) Para una distribución de velocidades de la capa límite laminar, de la forma:

$$\frac{u}{V_0} = \frac{2y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

$$\frac{1}{V_0} \frac{u}{y} \Big|_{y=0} = \frac{2}{x} \quad \frac{u}{y} \Big|_{y=0} = \frac{2 V_0}{x}$$

con:

$$\rho \int_0^y u (V_0 - u) \, dy = \frac{1}{x} \left\{ \int_0^y u (V_0 - u) \, dy \right\} = V_0^2 \frac{1}{x} \left\{ \int_0^y \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) \, dy \right\}$$

se obtiene:

$$\frac{1}{y} \int_0^y u (V_0 - u) \, dy = V_0^2 \frac{1}{x} \left\{ \int_0^y \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) \, dy \right\}$$

$$\begin{aligned} \frac{2 V_0}{x} &= V_0^2 \frac{1}{x} \int_0^y \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) \, dy = V_0^2 \frac{1}{x} \int_0^y \left\{ \frac{2y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2 \right\} \left\{ 1 - \frac{2y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 \right\} \, dy = \\ &= V_0^2 \frac{1}{x} \left(2 - \frac{5}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2}{15} V_0^2 \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\frac{15}{V_0} dx = d \quad \frac{15}{V_0} x = \frac{x^2}{2} + C \quad x^2 = \frac{30 x^2}{Re_x} \quad \frac{x}{x} = \frac{5,477}{\sqrt{Re_x}}$$

en la que se ha tenido en cuenta que para: $y = 0$; $x = 0$ $C = 0$

Los valores de los coeficientes C_x (local), y C_w (medio), son:

$$v_0 = \frac{u}{y} \Big|_{y=0} = C_x \frac{V_0^2}{2} = \frac{2 V_0}{x}$$

$$C_x = \frac{4}{V_0} = \frac{4 x}{Re_x} = \frac{4}{\frac{x}{Re_x}} = \frac{4}{5,477 \sqrt{Re_x}} = \frac{0,7303}{\sqrt{Re_x}}$$

$$C_w = \frac{1}{L} \int_0^L C_x dx = 2 C_x \Big|_{x=L} = \frac{1,4606}{\sqrt{Re_L}}$$

b) Para una distribución de velocidades de la capa límite de la forma:

$$\frac{u}{V_0} = \frac{3y}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

resulta:

$$v_0 = \frac{u}{y} \Big|_{y=0} = \frac{3 V_0}{2}$$

$$v_0 = V_0^2 \frac{1}{x} \int_0^{\delta} \left\{ \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) dy \right\} = V_0^2 \frac{1}{x} \int_0^{\delta} \left\{ \frac{3y}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \right\} \left\{ 1 - \frac{3y}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \right\} dy =$$

$$= 0,139 V_0^2 \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \frac{V_0}{x}$$

Igualándolas:

$$d = 10,79 \frac{dx}{V_0} \quad \frac{x^2}{2} = 10,79 \frac{x}{V_0} + Cte = \left| \text{Para: } \begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad Cte = 0 \right| = 10,79 \frac{x}{V_0}$$

$$\frac{x}{x} = \frac{4,64}{\sqrt{Re_x}}$$

$$v_0 = \frac{3}{2} \frac{V_0}{x} = \frac{3}{2} \frac{V_0 \sqrt{Re_x}}{2 \times 4,64 x} = \frac{0,323 V_0 \sqrt{Re_x}}{x} = 0,323 \sqrt{\frac{V_0^3}{x}} = \frac{V_0^2 C_x}{2}$$

$$C_x = \frac{0,646 \sqrt{Re_x}}{x V_0} = \frac{0,646}{\sqrt{Re_x}} \quad ; \quad C_w = \frac{1}{L} \int_0^L C_x dx = 2 C_x \Big|_{x=L} = \frac{1,292}{\sqrt{Re_L}}$$

El valor de C_w así obtenido para placa plana, está muy próximo al valor exacto (Blasius), y es de la forma:

$$C_x = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} \quad ; \quad C_w = \frac{1,328}{\sqrt{Re}} \quad ; \quad \frac{x}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}}$$

siendo la fuerza de arrastre F_a sobre cada cara de la placa de longitud L y anchura unidad:

$$F_a = \int_0^L v_0 dx = \int_0^L 0,323 \sqrt{\frac{V_0^3}{x}} dx = 0,646 \sqrt{V_0^3 L}$$

VIII.4.- ECUACIONES DE PRANDTL DE LA CAPA LIMITE

Si se supone un fluido incompresible, en movimiento laminar permanente, en flujo bidimensional sobre una pared cualquiera en la que el radio de curvatura es muy superior al espesor de la capa límite, las ecuaciones de Navier-Stokes se simplifican, quedando en la siguiente forma:

$$\frac{1}{x} \frac{P}{x} = x - \frac{du}{dt} + u$$

en la que, $\frac{du}{dt} = u \frac{u}{x} + v \frac{u}{y}$; $x = 0$, en la dirección del movimiento

La ecuación de continuidad es, $\frac{u}{x} + \frac{v}{y} = 0$, y como:

$$v = 0 ; \frac{v}{y} = 0 \quad \frac{u}{x} = 0 ; \frac{u^2}{x^2} = 0$$

la ecuación de Navier-Stokes queda en la forma:

$$\frac{1}{x} \frac{P}{x} = -u \frac{u}{x} - v \frac{u}{y} + \frac{u^2}{y^2}$$

En el borde de la capa límite se tiene la velocidad V_0 del movimiento irrotacional exterior, por lo que aplicando la ecuación de Bernoulli se puede hallar la variación longitudinal de la presión, resultando:

$$\frac{1}{2} \frac{dV_0^2}{dx} = -\frac{1}{x} \frac{P}{x} \quad \frac{1}{2} \frac{dV_0^2}{dx} + \frac{u^2}{y^2} = u \frac{u}{x} + v \frac{u}{y}$$

Si se introduce la función línea de corriente de la forma:

$$u = -\frac{y}{x} ; v = \frac{1}{x}$$

la ecuación de continuidad se satisface automáticamente, y sustituyendo estos valores en la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{2}{x} \frac{1}{y} - \frac{2}{y^2} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} \frac{P}{x} - \frac{3}{y^3}$$

de aplicación a la obtención de la capa límite laminar sobre un contorno plano.

ECUACIÓN CLÁSICA DE KÀRMÀN.- Los caudales de la cantidad de movimiento, en proyección paralela a la pared, manteniendo la anchura de la capa límite igual a la unidad, son los siguientes:

Sobre (AB): $q_{M(AB)} = q_M$, (entrante)

Sobre (CD): $q_{M(CD)} = q_M + \frac{q_M}{x} dx$, (saliente)

Sobre (BC): $\frac{q}{x} dx V_0$, (entrante)

La variación de la cantidad de movimiento es:

$$-\dot{q}_M + \left(\dot{q}_M + \frac{\dot{q}_M}{x} dx\right) - \frac{\dot{q}}{x} dx V_0 = \frac{\dot{q}_M}{x} dx - \frac{\dot{q}}{x} dx V_0$$

y el impulso mecánico:

$$p - \left(p + \frac{p}{x} dx\right) \left(1 + \frac{dx}{x}\right) - p_0 dx = - \left(p_0 + \frac{p}{x}\right) dx$$

Iguálndolas se obtiene:

$$\frac{\dot{q}_M}{x} - V_0 \frac{\dot{q}}{x} = -p_0 - \frac{p}{x}$$

$$\frac{\dot{q}_M}{x} - V_0 \frac{\dot{q}}{x} = \left[\begin{array}{l} \dot{q}_M = (1 - \alpha - \beta) V_0^2 \quad ; \quad \dot{q} = (V_0 - \alpha) \quad ; \quad -\alpha = Cte \\ \frac{\dot{q}_M}{x} = \frac{1}{x} \{ (1 - \alpha - \beta) V_0^2 \} = -\frac{2}{x} V_0^2 + (1 - \alpha - \beta) 2 V_0 \frac{V_0}{x} \\ \frac{\dot{q}}{x} = (1 - \alpha) \frac{V_0}{x} \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{2}{x} V_0^2 + (1 - \alpha - \beta) 2 V_0 \frac{V_0}{x} - (1 - \alpha) V_0 \frac{V_0}{x} = -p_0 - \frac{p}{x} =$$

$$= \left[p + \frac{V_0^2}{2} = Cte \quad ; \quad \frac{p}{x} = -V_0 \frac{V_0}{x} \right] = -p_0 + V_0 \frac{V_0}{x}$$

que simplificada queda en la forma:

$$p_0 = \frac{2}{x} V_0^2 + V_0 \frac{V_0}{x} (1 + 2\beta)$$

ecuación que se conoce como ecuación de Kàrmàn, en la que las variables V_0 , α y β no dependen más que de x .

VIII.5.- ECUACIÓN INTEGRAL DE LA ENERGÍA DE LA CAPA LÍMITE

El Primer Principio de la Termodinámica aplicado a un sistema abierto en régimen estacionario, permite calcular el calor Q puesto en juego en una transformación, en la forma:

$$Q = \dot{i} + T + E_{\text{cinética}} + E_{\text{potencial}}$$

e indica que la energía se puede considerar en forma de entalpía, calor o energía cinética, con las mismas unidades que el trabajo de cizalladura o de corte.

A pequeñas velocidades, los términos asociados a la energía cinética y potencial y al trabajo de cizalladura son pequeños en comparación con las demás magnitudes, y se pueden despreciar.

La velocidad a la que la entalpía entra a través de la sección (AB) de la capa límite representada en la Fig VIII.6 viene dada por:

$$\dot{i}_{(AB)} = m c_p T = c_p \int_0^T u T dy$$

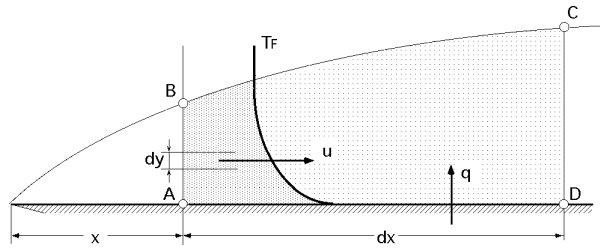


Fig VIII.6.- Capa límite térmica

mientras que la velocidad del flujo de entalpía a través de la sección (CD) es:

$$\dot{i}_{(CD)} = \dot{i}_{(AB)} + \frac{\dot{i}_{(AB)}}{x} dx = \dot{i}_{(AB)} + c_p \frac{T_F}{x} \left\{ \int_0^T u T dy \right\} dx$$

por lo que dentro de la capa límite quedará:

$$\dot{i}_{(AB)} - \dot{i}_{(CD)} = - c_p \frac{T_F}{x} \left\{ \int_0^T u T dy \right\} dx$$

La entalpía transportada al interior del volumen de control a través de la superficie (BC), es:

$$\dot{i}_{(BC)} = c_p T_F \frac{T_F}{x} \left\{ \int_0^T u dy \right\} dx$$

A su vez, el calor conducido a través de la capa límite es:

$$q_k = - k dx \left(\frac{T}{y} \right)_{y=0}$$

Sumando todas las contribuciones energéticas, se obtiene la ecuación integral para la conservación de la energía:

$$c_p T_F \frac{T_F}{x} \left\{ \int_0^T u dy \right\} dx - c_p \frac{T_F}{x} \left\{ \int_0^T u T dy \right\} dx - k dx \left(\frac{T}{y} \right)_{y=0} = 0$$

Como fuera de la capa límite térmica la temperatura es T_F , sólo se integrará hasta el límite ($y = T$) de la misma; por lo tanto:

$$c_p T_F \frac{T_F}{x} \int_0^T u dy - c_p \frac{T_F}{x} \int_0^T u T dy - k \left(\frac{T}{y} \right)_{y=0} = 0$$

$$\frac{T_F}{x} \int_0^T (T_F - T) u dy = \frac{k}{c_p} \left(\frac{T}{y} \right)_{y=0} = \left(\frac{T}{y} \right)_{y=0}$$

que es la ecuación integral de la energía de la capa límite laminar para el caso de un flujo de baja velocidad, en la que dx se comporta como un intervalo y es independiente de dy .

Si se utiliza un perfil de velocidades de tercer grado, de la forma:

$$\frac{u}{V_0} = \frac{3y}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{T} \right)^3$$

y una distribución de temperaturas:

$$\frac{T - T_{pF}}{T_F - T_{pF}} = \frac{T - T_F + T_F - T_{pF}}{T_F - T_{pF}} = \frac{T - T_F}{T_F - T_{pF}} + 1 = \frac{3}{2} \frac{Y}{T(x)} - \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{T(x)} \right)^2$$

$$Y = 0 ; T = T_{pF} ; \frac{2T}{Y^2} = 0$$

en la que, sustituyendo las condiciones:

$$Y = T ; T = T_F ; \frac{T}{Y} = 0$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{T}{Y} \right)_{Y=0} &= (T_{pF} - T_F) V_0 \frac{d}{dx} \int_0^T \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{Y}{T} + \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{T} \right)^3 \right\} \left\{ \frac{3}{2} \frac{Y}{T} - \frac{1}{2} \left(\frac{Y}{T} \right)^3 \right\} dy = \\ &= (T_F - T_{pF}) V_0 \frac{d}{dx} \left(\frac{3}{20} \frac{T^2}{T} - \frac{3}{280} \frac{T^4}{T^3} \right) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que: $\left(\frac{T}{Y} \right)_{Y=0} = (T_F - T_{pF}) \frac{3k}{2T}$, resulta:

$$\frac{3}{2} = V_0 \frac{d}{dx} \left(\frac{3}{20} \frac{T^2}{T} - \frac{3}{280} \frac{T^4}{T^3} \right) \quad T = \left| \frac{-T}{T} \right| = V_0 \frac{d}{dx} \left\{ \left(\frac{3}{20} T^2 - \frac{3}{280} T^4 \right) \right\}$$

En la ecuación de Pohlhausen se demuestra que:

$$\frac{-T}{T} = (Pr)^{-1/3}$$

El valor de Pr es del orden de la unidad para la mayor parte de los gases ($0,6 < Pr < 1$) mientras que para la mayor parte de los líquidos varía en un campo muy grande, con valores elevados para los aceites muy viscosos y bajas temperaturas, y valores muy bajos para los metales líquidos; en consecuencia, cuando:

$$\frac{-T}{T} \ll 1 ; \quad \ll 1 \quad 4 \ll 2$$

resulta:

$$\frac{3}{2} = V_0 \frac{d}{dx} \left(\frac{3}{20} T^2 \right) = \frac{3 V_0}{20} \left(2 \frac{dT}{dx} + 2 T \frac{dT}{dx} \right) \quad \frac{10}{V_0} dx = 3 T dT + 2 T^2 \frac{dT}{dx}$$

Derivando la solución hidrodinámica:

$$2 = 21,58 \frac{x}{V_0} \quad 2 T dT = 21,58 \frac{dx}{V_0}$$

sustituyendo, y simplificándola, se obtiene:

$$\frac{10}{V_0} dx = 3 \frac{10,79}{V_0} \frac{dx}{V_0} + 2 \times 21,58 T^2 \frac{dx}{V_0} dT$$

$$3 + 4 T^2 \frac{dT}{dx} = \frac{13}{14} = \frac{13}{14 (Pr)}$$

La solución general es: $3 = C x^{-3/4} + \frac{10}{10,79 Pr} = C x^{-3/4} + \frac{0,92678}{Pr}$

La solución exacta es:
$$T = C x^{-3/4} + \frac{13}{14 Pr} = C x^{-3/4} + \frac{0,92857}{Pr}$$

y con la condición:

$$T = T_i \quad ; \quad T = (T - T_i)^3 = 0 \quad ; \quad C = - \frac{13}{14} \frac{\sqrt[3]{x_i}}{Pr}$$

resulta, Fig VIII.7:

$$T = 0,976 \sqrt[3]{\frac{1 - (\frac{x_i}{x})^{3/4}}{Pr}}$$

por lo que:

$$h_{Cx} = \frac{3 k}{2 T} = \frac{\frac{3 k}{2}}{0,976 \sqrt[3]{\frac{1 - (\frac{x_i}{x})^{3/4}}{Pr}}} = \left| = \frac{4,64 x}{\sqrt{Re_x}} \right| = \frac{\frac{3 k}{2}}{0,976 \frac{4,64 x}{\sqrt{Re_x}} \sqrt[3]{\frac{1 - (\frac{x_i}{x})^{3/4}}{Pr}}} =$$

$$= \frac{3 k}{2 x} \frac{\sqrt[3]{Pr} \sqrt{Re_x}}{0,976 \times 4,64 \sqrt[3]{1 - (\frac{x_i}{x})^{3/4}}} = 0,332 k \frac{1}{\sqrt[3]{1 - (\frac{x_i}{x})^{3/4}}} \frac{\sqrt[3]{Pr} \sqrt{Re_x}}{x}$$

$$Nu_x = \frac{h_{Cx} x}{k} = \frac{0,332 \sqrt[3]{Pr} \sqrt{Re_x}}{\sqrt[3]{1 - (\frac{x_i}{x})^{3/4}}}$$

De haber considerado la ecuación de tercer grado de partida, se hubiera obtenido:

$$Nu_x = \frac{0,323 \sqrt[3]{Pr} \sqrt{Re_x}}{\sqrt[3]{1 - (\frac{x_i}{x})^{3/4}}}$$

Haciendo $\frac{x_i}{x} = 0$ se obtiene la ecuación de Pohlhausen:

$$Nu_x = 0,332 \sqrt{Re_x} Pr^{1/3}$$

Teniendo en cuenta que:

$$= \frac{0,976}{\sqrt[3]{Pr}} = T \quad ; \quad T = \frac{0,976}{\sqrt[3]{Pr}} = 4,534 \frac{x}{\sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Pr}}$$

el coeficiente medio de transmisión de calor por convección h_C en el intervalo $(0 \leq x \leq L)$ a lo largo de la superficie plana es:

$$h_C = \frac{1}{L} \int_{x=0}^{x=L} h_{Cx} dx = 2 h_{Cx} \Big|_{x=L} = \frac{0,664 k \sqrt{Re_L} Pr^{1/3}}{L} \quad (\text{exacto})$$

$$h_C = \frac{1}{L} \int_{x=0}^{x=L} h_{Cx} dx = 2 h_{Cx} \Big|_{x=L} = \frac{0,646 k \sqrt{Re_L} Pr^{1/3}}{L} \quad (\text{ecuación de tercer grado})$$

El calor transmitido desde la placa, de anchura unidad, al fluido, es:

$$Q = L h_c (T_{pF} - T_F)$$

Si se considera existen dos zonas longitudinales sobre la placa, perfectamente diferenciadas, una sin aporte de calor, Fig VIII.7, resulta:

$$x < x_1 ; Q = 0$$

$$\text{Para: } x > x_1 ; Q = 0,323 \frac{k_F}{x} Pr^{1/3} \sqrt{Re_x} \frac{T}{\sqrt[3]{1 - (\frac{x_1}{x})^{3/4}}}$$

$$\text{con, } T = T_{pF} - T_F$$

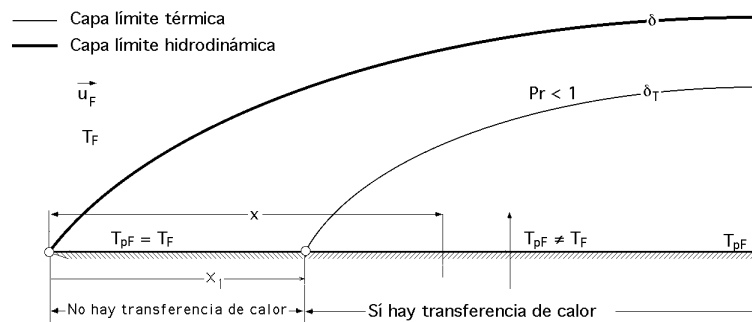


Fig VIII.7- Capa límite térmica e hidrodinámica superpuestas

Para una zona de la placa comprendida entre $(x_1 < x < x_2)$ a la que se aplica un flujo de calor Q , Fig VIII.8, se tiene:

$$Q = 0,323 \frac{k_F}{x} Pr^{1/3} \sqrt{Re_x} \left(\frac{T}{\sqrt[3]{1 - (\frac{x_1}{x})^{3/4}}} + \frac{-T}{\sqrt[3]{1 - (\frac{x_2}{x})^{3/4}}} \right)$$

observándose que el flujo de calor en la región $(x_1 > x_2)$ es $(-)$ lo cual significa que en la citada sección la pared reabsorbe parte del calor comunicado a la capa límite en la región $(x_1 < x < x_2)$.

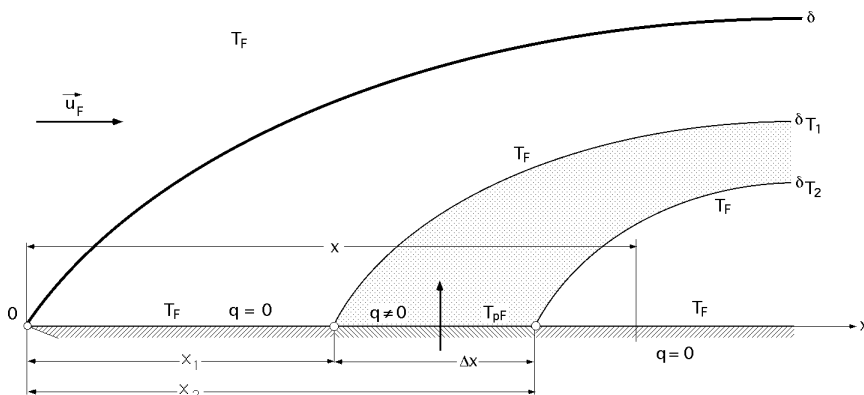


Fig VIII.8 - Placa con una capa límite laminar y dos capas límite térmicas

RELACIÓN ENTRE C_x y h_{Cx} EN FLUJO LAMINAR SOBRE PLACA PLANA.- A partir de la expresión exacta de Blasius para el coeficiente de arrastre local C_x a lo largo de una placa plana:

$$\frac{C_x}{2} = \frac{0,332}{\sqrt{Re_x}}$$

en la que se ha supuesto que para el espesor de la capa límite el gradiente de presiones es cero y las propiedades del fluido constantes, y del número de Nu local para el flujo laminar, (Pohlhausen):

$$Nu_x = 0,332 \sqrt{Re_x} Pr^{1/3}$$

y como el número de Stanton local St_x es:

$$St_x = \frac{h_{Cx}}{c_p V_0} = \frac{Nu_x}{Pr Re_x} = \frac{0,332}{Pr^{2/3} \sqrt{Re_x}} = \frac{0,332 C_x}{Pr^{2/3} 2 \times 0,332} = \frac{C_x}{2 Pr^{2/3}}$$

$$\frac{C_x}{2} = St_x Pr^{2/3} ; \quad Pr > 0,5$$

que se conoce como analogía de Reynolds-Colburn que relaciona el coeficiente de arrastre local C_x con el número de Stanton St_x para flujo laminar a lo largo de una placa plana.

Como es mucho más fácil hacer medidas de la fuerza de arrastre que de la transferencia de calor, para el caso de valores medios se puede poner:

$$\frac{C_w}{2} = St Pr^{2/3} = \frac{h_c}{c_p V_0} Pr^{2/3}$$

en la que C_w es el coeficiente de arrastre medio y St el número de Stanton medio.

Teniendo en cuenta lo anterior, la fuerza de arrastre F_a queda en la forma:

$$F_a = \frac{(L a) C_w V_0^2}{2} = \frac{(L a) h_c V_0^2}{c_p V_0} = (L a) \frac{h_c}{c_p} V_0$$

VIII.6.- CAPA LIMITE TURBULENTO PARA PLACA PLANA

No existe una teoría exacta que permita estudiar la capa límite turbulenta; sin embargo sí existen modelos empíricos que han permitido la obtención de soluciones numéricas de las ecuaciones de la capa límite. El reparto de velocidades para la placa plana es aproximadamente logarítmico, habiéndose obtenido al efecto los siguientes resultados experimentales:

$$\text{Para: } 10^5 < Re < 10^7 ; \quad \frac{u}{V_0} = \sqrt{\frac{y}{x}} , \text{ con: } m = 7, \quad F = \frac{9}{7}$$

El valor de θ de la forma:

$$\theta = \frac{1}{x} \int_0^{\delta} u (V_0 - u) dy$$

se puede aplicar también al régimen turbulento, por cuanto en su demostración no se ha fijado la forma de la distribución de velocidades en la capa límite, por lo que la distribución de velocidades (u/V_0) puede ser, para placa plana, de la forma:

$$\frac{u}{V_0} = \sqrt{\frac{y}{R}}$$

y para flujo turbulento por el interior de tuberías, (Nikuradse):

$$\frac{u}{V_{\text{máx}}} = \sqrt{\frac{y}{R}}$$

En estas circunstancias Blasius dedujo experimentalmente que:

$$\tau_0 = 0,0288 V_0^2 \sqrt[4]{\frac{\mu}{\rho V_0}}, \text{ con, } 5 \cdot 10^5 < Re < 10^7$$

Siguiendo el mismo método que para el cálculo de la capa límite laminar:

$$\tau_0 = V_0^2 \frac{d}{dx} \left\{ \int_0^y \frac{u}{V_0} \left(1 - \frac{u}{V_0}\right) dy \right\} = V_0^2 \frac{d}{dx} \left[\int_0^{\sqrt[7]{\frac{y}{R}}} \left\{1 - \sqrt[7]{\frac{y}{R}}\right\} dy \right] = \frac{7}{72} V_0^2 \frac{d}{dx}$$

Igualando las expresiones:

$$\frac{7}{72} V_0^2 \frac{d}{dx} = \tau_0 = 0,0288 V_0^2 \sqrt[4]{\frac{\mu}{\rho V_0}}$$

se obtiene:

$$\sqrt[4]{d} = 0,234 \sqrt[4]{\frac{\mu}{\rho V_0}} dx ; \quad x^{5/4} = 0,292 \sqrt[4]{\frac{\mu}{\rho V_0}} x ; \quad \frac{x}{L} = \frac{0,376}{\sqrt[5]{Re_x}}$$

en donde se ha supuesto que la capa límite es turbulenta en el total de la longitud de la placa L de forma que para (x = 0, \tau_0 = 0).

El esfuerzo cortante τ_0 es:

$$\tau_0 = 0,0288 V_0^2 \sqrt[4]{\frac{\mu}{\rho V_0}} = 0,0288 V_0^2 \sqrt[4]{\frac{\mu}{\rho V_0} \frac{0,376 x}{\sqrt[5]{Re_x}}} = 0,029 V_0^2 \sqrt[5]{\frac{\mu x}{\rho V_0}}$$

La fuerza de arrastre F_a por unidad de anchura de la placa es:

$$F_a = \int_0^L \tau_0 dx = 0,036 \frac{V_0^2 L}{\sqrt[5]{Re_L}} ; \quad C_x = \frac{0,0576}{\sqrt[5]{Re_x}} ; \quad C_w = \frac{0,072}{\sqrt[5]{Re_L}} = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho V_0^2 L}$$

ecuaciones válidas en el intervalo en que lo es la ecuación de Blasius.

Para el número de Re crítico, $Re_c = 5 \cdot 10^5$, resulta:

$$C_w = \frac{0,072}{\sqrt[5]{Re_L}} - 0,00334 \frac{x_c}{L} = \frac{0,072}{\sqrt[5]{Re_L}} - \frac{1700}{Re_L}$$

Para valores del número de Re comprendidos en el intervalo, $5 \cdot 10^5 < Re_x < 10^9$, resulta:

$$C_{wx} = \frac{0,455}{(\log_{10} Re_L)^{2,58}}$$

El coeficiente de arrastre, que es exacto para toda la placa, y que incluye las zonas laminar y turbu-

lenta, se determina mediante las expresiones:

$$C_w = \frac{1,328}{\sqrt{Re_C}} \frac{Re_C}{Re_L} + 0,074 Re_L^{-1/5} \left\{ 1 - \left(\frac{Re_C}{Re_L} \right)^{4/5} \right\} ; Re_L > 10^7$$

$$C_w = \frac{1,328}{\sqrt{Re_C}} \frac{Re_C}{Re_L} + \frac{0,523}{\ln^2(0,06 Re_L)} - \left(\frac{Re_C}{Re_L} \right) \frac{0,523}{\ln^2(0,06 Re_C)} ; Re_L < 10^7$$

VIII.7.- DESPRENDIMIENTO DE LA CAPA LIMITE

Cuando el gradiente de presiones se mantiene nulo a lo largo de la placa plana, la capa límite se desarrolla a lo largo de la misma, independientemente de su longitud. Pero si el gradiente de presiones es *adverso*, la presión aumenta en el sentido de la corriente, y el espesor de la capa límite crece rápidamente. Por otro lado, el gradiente de presión adverso junto con el esfuerzo cortante en la pared, hacen que disminuya la cantidad de movimiento dentro de la capa límite y, si ambos actúan a lo largo de una distancia suficiente, el fluido de la capa límite se irá frenando hasta alcanzar el reposo; en este instante, la línea de corriente que coincide con la pared se aleja de la superficie a partir del punto de separación, conociéndose este fenómeno como *desprendimiento de la capa límite*.

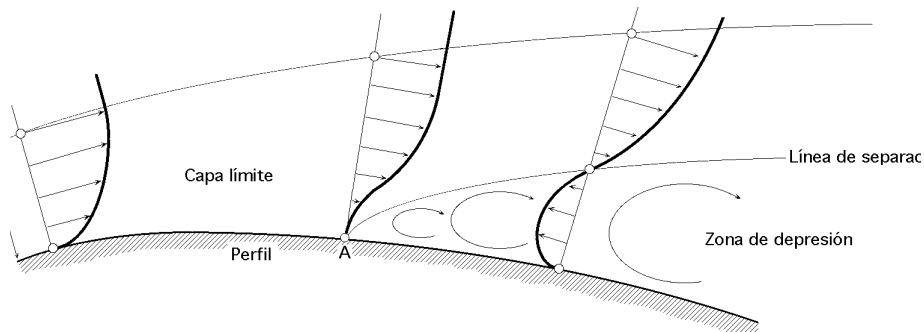



Fig VIII.9.- Desprendimiento de la capa límite

El fenómeno se acentúa cuando el perfil es un conducto divergente; el flujo en las proximidades del contorno se va frenando continuamente hasta alcanzar el punto A de la Fig VIII.9, en el que la velocidad se hace cero. La forma del contorno puede exigir una disminución mayor de la velocidad, cosa imposible, por lo que el fluido se separará de él, produciéndose al mismo tiempo un contraflujo originado por el gradiente de presiones adverso, es decir, aguas abajo del punto de desprendimiento se origina una zona de bajas presiones, que provocan la aparición de una fuerza depresiva dirigida en el sentido de la corriente, denominada *Resistencia de forma*, por depender hasta cierto punto de la geometría del perfil.

Tabla VIII.2.- Coeficientes de arrastre C_w de cuerpos y perfiles inmersos en una corriente fluida de velocidad V_0

$$F_a = \frac{C_w V_0^2 A_{\text{Frontal}}}{2}$$

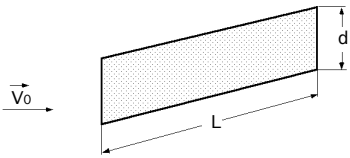
a) *Placa plana paralela a la corriente*

$\vec{v}_0 \rightarrow$ 

Régimen laminar: $C_w = \frac{1,33}{\sqrt{Re}}$

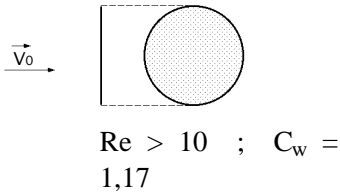
$$Re < 10^7 \quad C_w = \frac{0,074}{\sqrt[5]{Re}} ; Re > 10^7 \quad C_w = \frac{0,455}{\{\log_{10} Re\}^{2,58}}$$

b) Placa plana perpendicular a la corriente, $Re > 10^3$

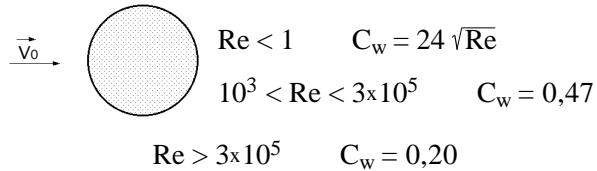


| | | | | | | |
|-------|------|-----|-----|-----|-----|------|
| L/d | 1 | 5 | 10 | 20 | 30 | |
| C_w | 1,18 | 1,2 | 1,3 | 1,5 | 1,6 | 1,95 |

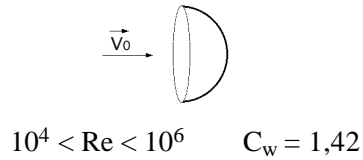
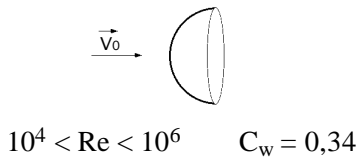
c) Disco circular normal a la corriente



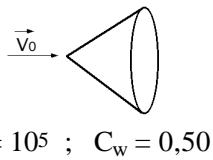
d) Esfera



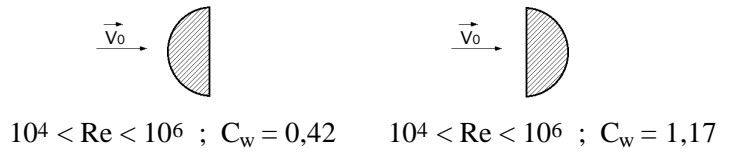
e) Hemisferio hueco



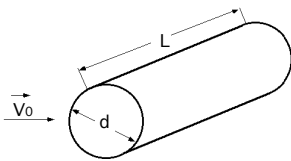
f) Cono de 60°



g) Semicilindro



h) Cilindro normal a la corriente



$Re < 0,2$; $C_w = \frac{8 p}{Re \{2,2 - \lg_{10} Re\}}$

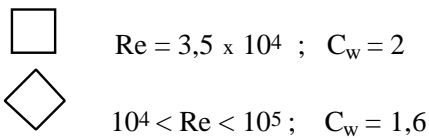
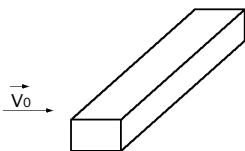
$10^3 < Re < 10^5$

| | | | | | | |
|-------|------|-----|------|------|----|-----|
| L/d | 1 | 5 | 10 | 20 | 30 | |
| C_w | 0,63 | 0,8 | 0,83 | 0,93 | 1 | 1,2 |

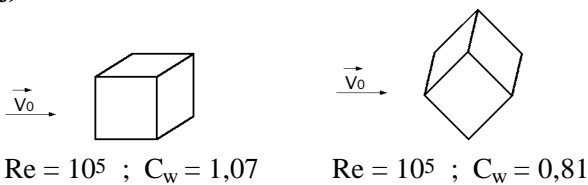
$Re > 5 \times 10^5$

| | | |
|-------|------|-----|
| L/d | 5 | |
| C_w | 0,35 | 1,6 |

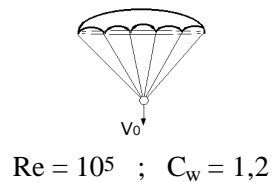
i) Prisma



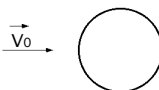


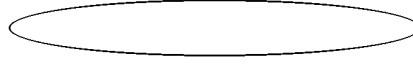
j) Cubo



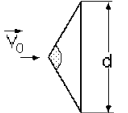
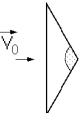
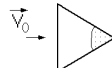

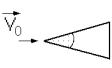
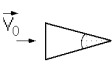
k) Paracaídas (Baja porosidad),



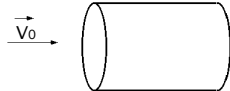
l) Cilindros elípticos

| | | |
|--------------|--|----------------------------------|
| |  | |
| Relación 1/1 | Régimen laminar, $C_w = 1,20$ | Régimen turbulento, $C_w = 0,30$ |
| |  | |
| Relación 2/1 | Régimen laminar, $C_w = 0,60$ | Régimen turbulento, $C_w = 0,20$ |
| |  | |
| Relación 4/1 | Régimen laminar, $C_w = 0,35$ | Régimen turbulento, $C_w = 0,15$ |
| |  | |
| Relación 8/1 | Régimen laminar, $C_w = 0,25$ | Régimen turbulento, $C_w = 0,10$ |


m) Cilindro triangular

| | | | |
|---|--|---|--|
|  | $120^\circ ; Re > 10.000 ; C_w = 1,72$ |  | $120^\circ ; Re > 10.000 ; C_w = 2,0$ |
|  | $60^\circ ; Re > 10.000 ; C_w = 1,72$ |  | $60^\circ ; Re > 10.000 ; C_w = 1,39$ |
|  | $30^\circ ; Re > 100.000 ; C_w = 1,00$ |  | $30^\circ ; Re > 100.000 ; C_w = 1,8C$ |

n) Cilindro de sección lenticular:

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|-----|------|------|------|---|---|-------|------|-----|------|------|------|
|  | $Re > 10^3$ | | | | | | | | | | | | |
| | <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>L/d</td> <td>0,5</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>C_w</td> <td>1,15</td> <td>0,9</td> <td>0,85</td> <td>0,87</td> <td>0,99</td> </tr> </table> | L/d | 0,5 | 1 | 2 | 4 | 8 | C_w | 1,15 | 0,9 | 0,85 | 0,87 | 0,99 |
| L/d | 0,5 | 1 | 2 | 4 | 8 | | | | | | | | |
| C_w | 1,15 | 0,9 | 0,85 | 0,87 | 0,99 | | | | | | | | |

o) Elipsoide

| | | | |
|---|---------------------|-------------------------------|----------------------------------|
|  | Relación L/d = 0,75 | Régimen laminar, $C_w = 0,50$ | Régimen turbulento, $C_w = 0,20$ |
| | Relación L/d = 1,00 | Régimen laminar, $C_w = 0,47$ | Régimen turbulento, $C_w = 0,20$ |
| | Relación L/d = 2,00 | Régimen laminar, $C_w = 0,27$ | Régimen turbulento, $C_w = 0,13$ |
| | Relación L/d = 4,00 | Régimen laminar, $C_w = 0,25$ | Régimen turbulento, $C_w = 0,1$ |
| | Relación L/d = 8,00 | Régimen laminar, $C_w = 0,20$ | Régimen turbulento, $C_w = 0,08$ |

VIII.8.- PARADOJA DE D'ALEMBERT

Cuando un cuerpo sólido se mueve en el interior de un fluido real, se originan unas fuerzas debidas a la viscosidad. Por el Principio de acción y reacción, el cuerpo ejerce sobre el fluido una fuerza igual y de sentido contrario a la que el fluido ejerce sobre el solido, es decir, el fenómeno de la resistencia que un solido experimenta al moverse en el seno de un fluido, es análogo al de la resistencia que un fluido experimentaría al moverse en el interior de un solido, como una tubería, por ejemplo.

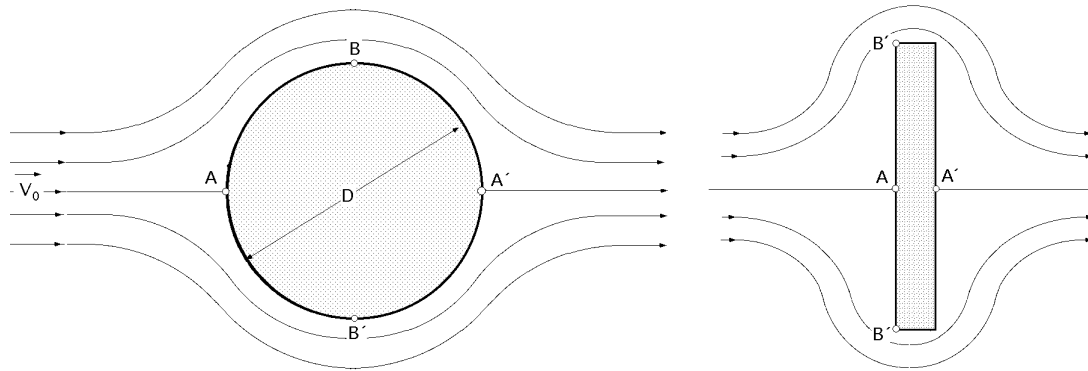


Fig VIII.10.- Cilindro y placa en el seno de un fluido perfecto en movimiento

Sea un cilindro, una esfera, etc, Fig VIII.10, colocados en el seno de un flujo bidimensional, carente de viscosidad; si el fluido se mueve en régimen laminar, su velocidad en los puntos A y A' será nula, (puntos de estancamiento), siendo, por lo tanto, su presión máxima; en los puntos B y B' la velocidad alcanza su valor máximo, y la presión su valor mínimo; en consecuencia, la distribución de presiones en torno al cilindro, esfera, etc., será simétrica, llegándose a la conclusión de que estos sólidos introducidos en un fluido ideal, moviéndose en régimen laminar, no estarán sometidos a ninguna fuerza, permaneciendo quietos, resultado que esta en contradicción con la realidad, por cuanto la experiencia dice que este hecho de la distribución simétrica de presiones no se cumple, hecho afortunado atribuible a la viscosidad del fluido, por cuanto los solidos introducidos en el seno de un fluido en movimiento presentan una resistencia al avance, tanto mayor, cuanto mayor sea la diferencia de presiones existente entre los puntos A y A'. Si el cilindro, esfera, etc., se mueve con velocidad constante \vec{u}_0 en el seno del fluido ideal en reposo, será equivalente a considerar el cilindro circular fijo, y el fluido ideal moviéndose en sentido contrario con velocidad $-\vec{u}_0$.

Al ser el fluido ideal se cumple que:

- a) La energía será constante en todos los puntos de una misma línea de corriente.
- b) Es irrotacional, lo cual implica el que la energía es constante en todos los puntos, aunque no estén en la misma línea de corriente.

Sabemos que:

$$V_s = 2 u_0 \text{ sen } \theta$$

siendo V_s la velocidad del fluido en un punto de la superficie del cilindro, tal como se muestra en la Fig VIII.11. Si la gravedad no interviene, bien porque el plano del dibujo sea horizontal, o porque el fluido sea un gas, aplicando Bernoulli entre la sección O, corriente sin perturbar, y un punto cualquiera S del cilindro, se tiene:

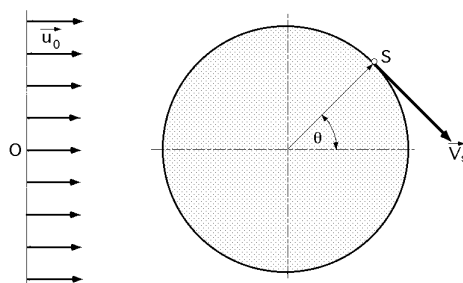


Fig VIII.11.- Circulación de un fluido perfecto en torno a un cilindro

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{u_0^2}{2} = \frac{P_s}{\rho} + \frac{V_s^2}{2}$$

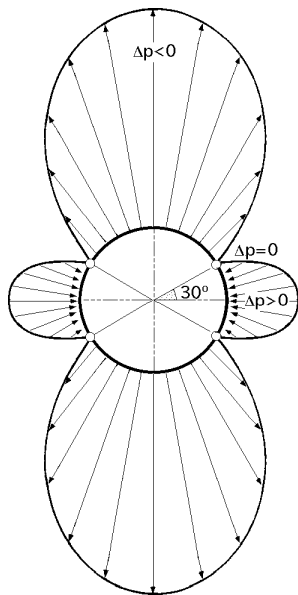
Despejando P_s resulta: teniendo en cuenta que ($\rho = \rho_0$):

$$P_s = P_0 + \frac{\rho}{2} (u_0^2 - V_s^2) = P_0 + \frac{\rho}{2} (u_0^2 - 4 u_0^2 \sin^2 \theta) = P_0 + \frac{\rho u_0^2}{2} (1 - 4 \sin^2 \theta)$$

que se puede poner también en la forma:

$$\frac{P_s - P_0}{\frac{\rho u_0^2}{2}} = \frac{P - P_0}{\frac{\rho u_0^2}{2}} = 1 - 4 \sin^2 \theta$$

Las fuerzas debidas a la presión son normales en cada punto del cilindro; dando valores a θ se obtienen los correspondiente valores de P que se manifiestan



en la Fig VIII.12, en la que el diagrama polar de presiones nos permite visualizar la paradoja de D'Alembert, y en donde por la simetría de las presiones, la resultante según el eje horizontal, fuerza de arrastre, es nula, es decir, *Un cilindro se mueve en el seno de un fluido ideal sin experimentar resistencia alguna*. En el fenómeno, la presión puede ser mayor, igual o menor que cero, obteniéndose los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \text{Para: } & P = 0 ; 1 - 4 \sin^2 \theta = 0 ; \theta = \pm 30^\circ \\ & P > 0 ; 1 - 4 \sin^2 \theta > 0 ; \theta < \pm 30^\circ \\ & P < 0 ; 1 - 4 \sin^2 \theta < 0 ; \theta > \pm 30^\circ \end{aligned}$$

Fig VIII.12.- Diagrama de presiones en la circulación de un fluido perfecto en torno a un cilindro

Esto es lo mismo que si el potencial de una singularidad formada por un par de manantiales de signo contrario y

muy cercanos se combina con el potencial ($\phi = u_0 x$) de la corriente unidimensional; se tiene un flujo igual al que se tendría si en la corriente traslacional se sumergiese una esfera. En este flujo el movimiento relativo de la esfera estaría privado de resistencia (paradoja de D'Alembert).

En cambio, si el potencial del par indicado anteriormente se combina con el de un movimiento horizontal plano (bidimensional), se obtiene un flujo igual al que se tendría si se sumergiese en la corriente un cilindro circular de eje normal al plano y de altura infinitesimal como el espesor de la corriente.

Incluso en este flujo el movimiento relativo del cilindro resultaría privado de resistencia porque la

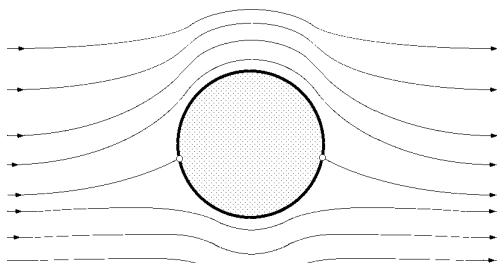
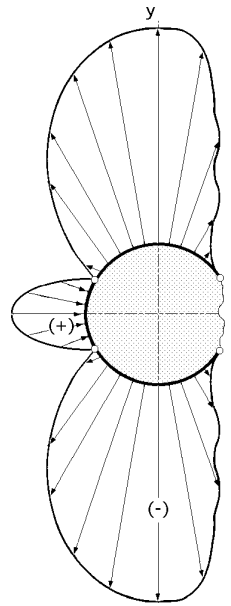


Fig VIII.13

distribución de las presiones en la parte anterior sería igual a la distribución de las mismas en la parte posterior. Además no se manifestarían fuerza ni tan siquiera en sentido transversal al movimiento, porque la distribución de las presiones es simétrica incluso en aquella dirección. Si además se añade a esta configuración el potencial de un torbellino se tiene un flujo igual al que se tendría si el cilindro descrito anteriormente empezase a girar sobre su propio eje, Fig VIII.13, en

la que se observa el comportamiento de los filetes de fluido en un cilindro que gira en sentido contrario a las agujas del reloj alrededor de su eje.

En estas condiciones la resistencia todavía es nula, pero en sentido transversal la distribución de las presiones no es ya simétrica sobre ambos lados; aparece entonces una resultante normal, perpendicular al movimiento, que se denomina sustentación, que tiene un valor que viene dado por:



Vectorialmente: $\vec{F}_{asc} = (\vec{u}_0 \times \vec{\Gamma})$
 Escalarmente: $F_{asc} = u_0 \Gamma$

en las que Γ es la circulación (teorema de Kutta-Zhoukovski). El cilindro representa el núcleo del torbellino. Puesto que, en circunstancias reales, el fluido no es perfecto, detrás del cilindro se da una distribución de presiones superficiales distinta de la que se da en la parte anterior, porque la vena fluida se separa de la superficie nace de esta forma una resistencia. Conviene entonces achatar la sección circular hasta reducirla a un perfil no simétrico, de manera que en la parte posterior los hilos de fluido se separen del perfil lo más tarde posible.

Fig VII.14.- Distribución de presiones alrededor de un cilindro en rotación

La asimetría de la distribución de presiones sobre dicho perfil recuerda la del cilindro que gira alrededor de su eje; por eso, el perfil continúa siendo la representación física del torbellino del mismo modo que el cilindro. En la Fig VIII.14 se presenta la distribución de presiones alrededor de un cilindro en movimiento de rotación, inmerso en un fluido en movimiento relativo respecto al baricentro del cilindro.

VIII.9.- FLUJO PARA UN FLUIDO REAL EN TORNO A UN CILINDRO CIRCULAR

El flujo alrededor de un cilindro circular es un excelente ejemplo de los efectos causados por el desprendimiento de la capa límite sobre la fuerza de arrastre. Si se considera al cilindro inmerso en la corriente, desde un punto de vista macroscópico la configuración de la misma en torno al cilindro sería la indicada en la Fig VIII.13, pero si nos detenemos en un punto cualquiera de la superficie del cilindro, y se pasa a la observación microscópica, se encuentra que la distribución de velocidades, como se sabe, tiene otra forma, según la cual, la capa de fluido contigua al cilindro se adhiere al mismo, por su viscosidad, por lo que su velocidad en el punto de contacto con el cilindro se reduce a cero, Fig VIII.15.

Esta velocidad aumenta rapidísimamente hasta que, pasada una cierta película de fluido de espesor , la velocidad que adquiere el fluido es V_0 , correspondiente a las líneas de corriente.

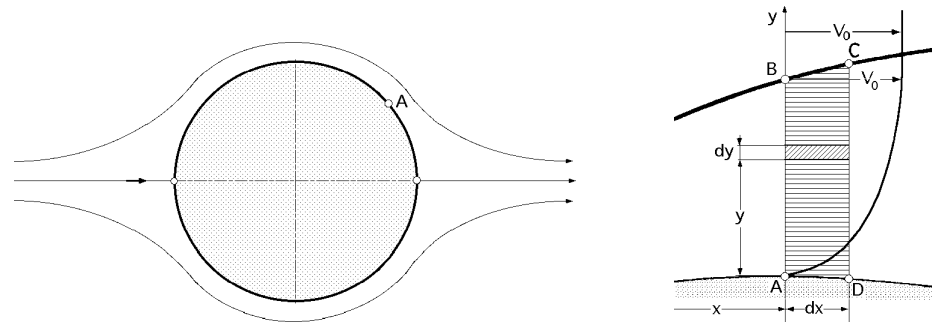


Fig VIII.15.- Cilindro inmerso en una corriente y observación microscópica del flujo en sus proximidades

En la ecuación de Newton

$$= \frac{du}{dy}$$

se tiene que, aunque sea muy pequeña, caso del agua y del aire, por ejemplo, resulta que el gradiente de velocidades du/dy es muy grande, por cuanto la variación de velocidad tiene lugar dentro del espesor δ , muy pequeño, y en consecuencia, el esfuerzo cortante será muy grande.

En la práctica, y salvo aquellos casos en que la velocidad del fluido sea muy pequeña, no se suele dar la configuración de las líneas de corriente como las hemos visto hasta ahora sino que a partir de un cierto punto del cilindro, las líneas de corriente se separan, desprendiéndose la capa límite, y creándose aguas abajo del cilindro unos remolinos que configuran la estela, y que originan una depresión.

Al estudiar, como caso particular, el flujo bidimensional de un fluido incompresible en torno a un cilindro circular de diámetro D , el coeficiente de arrastre C_w es a su vez función del número de Reynolds, Fig VIII.16, según hemos visto por análisis dimensional, pudiéndose considerar 6 casos para distintos valores de C_w y Re , tal como se indican a continuación.

El tipo *a*, Fig VIII.17, tiene un número de Reynolds muy pequeño, $Re < 1$, por lo que las fuerzas de inercia son pequeñas en comparación con las de viscosidad, cerrándose el flujo suavemente detrás del cilindro, aguas abajo del mismo

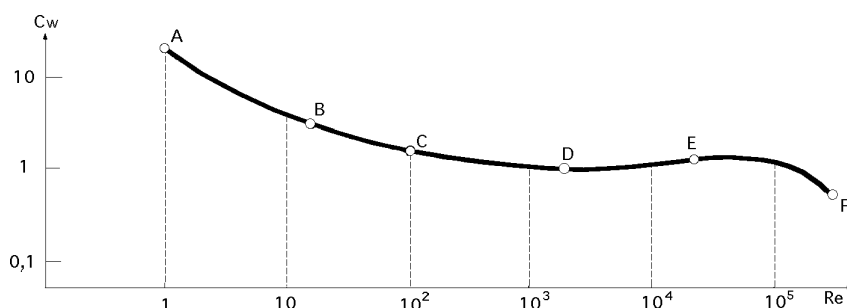


Fig VIII.16.- Valores del coeficiente de arrastre en función del número de Re

Al aumentar el número de Reynolds, el coeficiente de arrastre C_w disminuye; este caso *b* Fig VIII.18, se presenta para, $Re \approx 20$. El flujo es laminar a lo largo de la superficie del cilindro aguas arriba; en el punto S se produce la separación de la capa límite laminar. Aguas abajo aparece una región en la que se encuentran dos remolinos estacionarios.

Para valores del número de Reynolds, $Re > 20$, Fig VIII.19, los remolinos se hacen inestables, comienzan a vibrar irregularmente, y posteriormente se separan alternativamente de los dos lados, periódicamente, describiendo lo que se conoce como la *trayectoria del vórtice de Kàrmàn*, existiendo después del cilindro una disposición estable y escalonada de vórtices. La capa límite del lado de la corriente arriba del cilindro es laminar, separándose detrás del cilindro. En la estela posterior aparecen una serie de capas libres laminares.

Para valores del número de Reynolds comprendidos entre, $5.000 < Re < 15.000$, Fig VIII.20, el flujo se separa del cilindro para formar una estela simétrica con capas libres turbulentas caso *d*.

El tipo *e* Fig VIII.21, aparece para números de Reynolds comprendidos entre, $50.000 < Re < 200.000$, siendo, para este caso, constante el coeficiente de arrastre C_w . El punto S es la separación de la capa

límite laminar, produciéndose la transición al mismo tiempo que la separación.

Para el tipo *f* Fig VIII.22, el numero de Reynolds es, $Re > 200.000$, y la transición se produce en la capa límite laminar, por delante del punto de separación. En la capa límite turbulenta existirán una intensa mezcla de porciones de fluido, siendo el perfil de velocidades mas brusco, retrasándose, en consecuencia, la separación. Detrás del cilindro, la capa límite turbulenta se separara para formar una estela turbulenta.

Como resumen, se puede asegurar que, para el flujo alrededor de un cilindro, y para números de Re muy pequeños, el flujo es laminar en todos sus puntos; para números grandes de Re , el flujo se puede considerar como potencial, salvo en la capa límite y en la estela.

La capa límite se forma a partir del punto de estancamiento, aguas arriba del cilindro, y suele ser laminar, para la cual, un gradiente de presión adverso, precipita la separación mas pronto que en una capa límite turbulenta, por ser la cantidad de movimiento relativamente pequeña en la capa laminar, encontrándose que, el punto de separación para la capa límite laminar se sitúa mas arriba del cilindro que el punto de separación correspondiente al caso en que la capa límite se hace turbulenta antes de que se separe. La transferencia de la cantidad de movimiento incrementada en la capa límite turbulenta retrasa el punto de separación, deduciéndose la estela en tamaño.

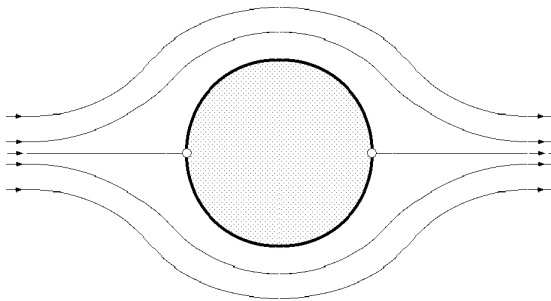


Fig VIII.17

a) Flujo bidimensional en torno a un cilindro, $Re < 1$

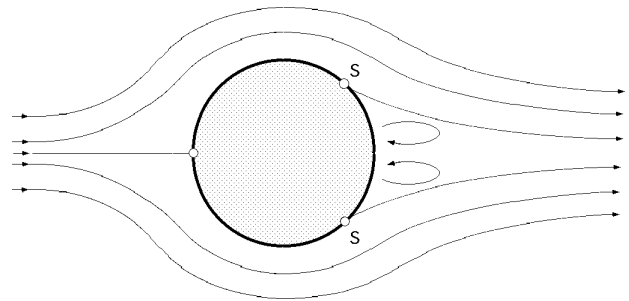


Fig VIII.18

b) Flujo bidimensional en torno a un cilindro, $Re = 20$

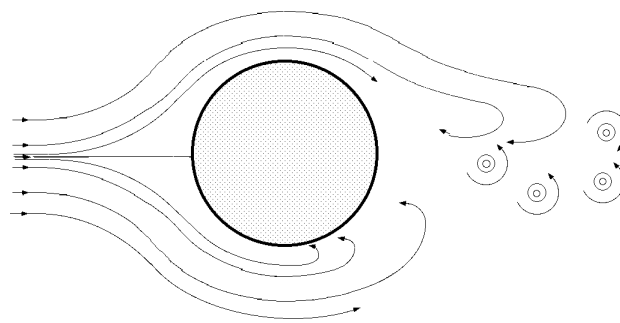


Fig VIII.19.- c) Flujo bidimensional en torno a un cilindro, $Re > 20$

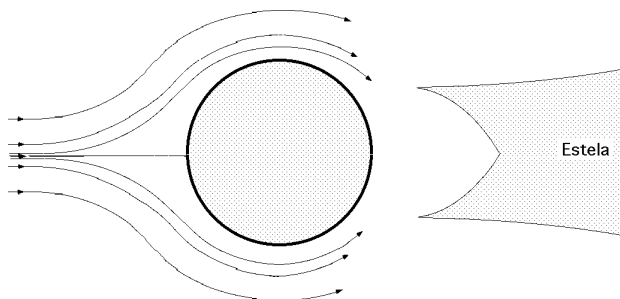


Fig VIII.20.- d) Flujo bidimensional en torno a un cilindro, $5.000 < Re < 15.000$

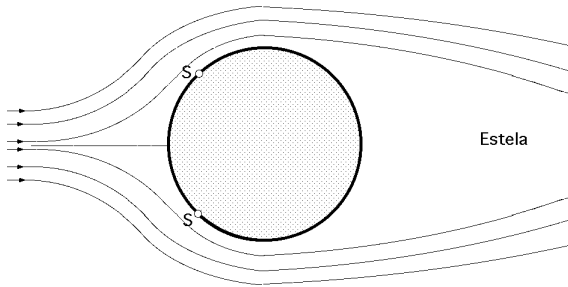


Fig VIII.21.- e) Flujo bidimensional en torno a un cilindro, $50.000 < Re < 200.000$

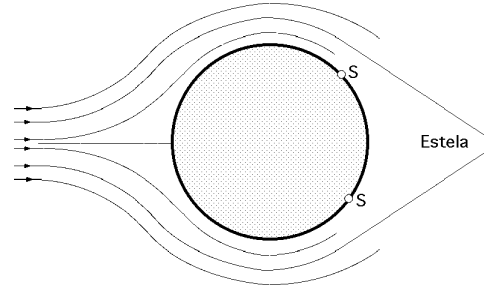


Fig VIII.22.- f) Flujo bidimensional en torno a un cilindro, $Re > 200.000$

PERFIL DE ALA DE AVIÓN.- Para el caso del perfil de un ala de avión inmersa en un fluido, Fig VIII.23, en el extradós se produce una fuerte depresión (aspiración) y en el intradós se produce una pequeña presión que se extiende hasta el borde de ataque (borde frontal) del ala, para pequeños valores de su ángulo de inclinación (ángulo de incidencia) en relación a la dirección de la corriente no perturbada.

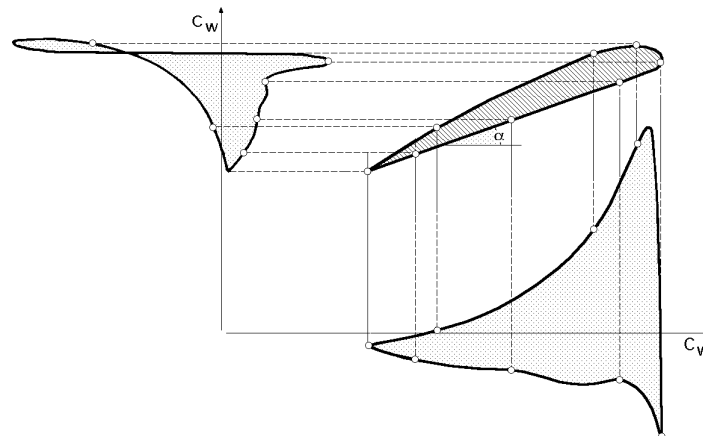


Fig VIII.23.- Coeficientes aerodinámicos de un perfil de ala de avión

El valor medio de la diferencia de presiones entre intradós y extradós, para una superficie de ala igual a:

$$S \text{ (} L_{\text{cuerda}} \times 1 \text{ metro lineal de ala)}$$

proporciona la fuerza de sustentación, de la forma:

$$F_{\text{sust}} = \frac{C_w}{2} S u_0^2$$

en la que C_w es el coeficiente de sustentación, que depende de la forma del perfil y del ángulo de ataque.

Se puede imaginar el ala infinita sustituida por un serie de torbellinos, con el eje paralelo al borde de ataque, como tramos ds de fluido adherente entran en la longitud L del ala. Cuando se examina un ala de longitud L finita, estos torbellinos, que están adheridos a la superficie, no terminan donde el ala está cortada, sino que se repliegan hacia atrás a 90° (torbellinos en forma de herradura o de estribo), formando torbellinos libres.

Estos torbellinos, por efecto de la inducción, desvían hacia abajo la corriente detrás del ala, con velocidad \bar{v} menor que la velocidad \bar{V} del fluido. Por tal motivo, el ala finita puede considerarse equivalente

a un ala infinita con el mismo perfil, pero con una incidencia reducida, y puesto que para el ala infinita la sustentación es función lineal de la incidencia, el ala finita tiene una sustentación menor.

Para un ala infinita, la resultante aerodinámica es perpendicular a la velocidad, (es decir, la resistencia es nula), pero para un ala finita se origina una resistencia inducida R_i , que se añade a la resistencia de perfil R_p debida al rozamiento y a la falta de recuperación de presiones provocada por la separación de la corriente; la suma de estas dos resistencias R es:

$$R = \frac{C_w^* S V^2}{2}$$

donde C_w^* es el coeficiente de resistencia que depende de la forma del perfil y del ángulo α .

En la práctica, la sustentación no crece indefinidamente con α sino que el coeficiente de sustentación alcanza un valor $C_{w(m\acute{a}x)}$ y después disminuye bruscamente para $\alpha = 12^\circ \div 16^\circ$.

Esto es debido a que la vena fluida, cuando el ángulo α tiene un valor demasiado elevado, no puede permanecer unida a la superficie dorsal y se produce una reducción de la depresión, que es el fenómeno de mayor influencia en la sustentación del ala.

La determinación teórica de la distribución de la sustentación sobre la abertura alar de un ala finita de anchura nula, se efectúa de diversas formas, entre las cuales está la de Weissinger, que consiste en esquematizar el ala con un hilillo sustentante situado en coincidencia con el 25% de la cuerda L a partir del borde de ataque, y también en calcular el ángulo de inducción del remolino en correspondencia con una línea situada a 3/4 de la longitud L y finalmente en colocar dicho ángulo igual a la inclinación que allí tiene la línea media del perfil.

Al ala, considerada hasta ahora de espesor nulo, se la dota de los adecuados perfiles alares para mejorar sus características y así determinar experimentalmente el valor de los diversos coeficientes aerodinámicos de un modelo cualquiera (ala, automóvil, fuselaje, etc).

Para obtener la resistencia total, es necesario añadir a la resistencia del perfil deducida anteriormente, la resistencia de rozamiento, como la que se tendría sobre una cara de una superficie plana lisa y cuyo coeficiente de arrastre puede obedecer a:

$$C = \frac{0,455}{(\lg Re)^{2,58}} \quad ; \quad Re = \frac{V L}{\nu}$$

En la capa límite, la corriente es laminar en la primera parte del cuerpo, y después turbulenta debajo de una subcapa laminar (analogía de Prandtl). La resistencia de rozamiento depende de la capa límite, en la que se forman los torbellinos que, al pasar al restante campo del fluido, originan la estela.