



UNIVERSIDAD DE OVIEDO

Escuela Politécnica Superior de Ingeniería de Gijón

Ingenieros Industriales

Curso 2008-2009

Apuntes de Mecánica de Fluidos: 2ª parte

## II.4. FLUJO COMPRESIBLE.



*Condensación del vapor de agua del aire húmedo, en torno a la onda de choque normal provocada por el paso de régimen subsónico a supersónico (barrera del sonido)*

**Julián Martínez de la Calle**  
Área de Mecánica de Fluidos  
Gijón enero 2009

## 4. FLUJO COMPRESIBLE.

- 4.1. Compresibilidad.
  - 4.1.1. Módulo de compresibilidad
  - 4.1.2. Velocidad sónica.
  - 4.1.3. Número de Mach.
- 4.2. Flujo isentrópico unidimensional.
  - 4.2.1. Ecuaciones termodinámicas.
  - 4.2.2. Ecuaciones mecánicas.
- 4.3. Ondas de choque.
  - 4.3.1. Relaciones de Rankine-Hugoniot.
- 4.4. Problemas resueltos.

### 4.1. COMPRESIBILIDAD.

#### 4.1.1. MODULO DE COMPRESIBILIDAD.

Para todo tipo de materia (sólido, líquido o gas), el aumento de presión ( $\Delta p$ ), origina siempre una disminución de volumen ( $\Delta V$ ). En la zona de elasticidad lineal de los materiales, la variación unitaria de volumen ( $\Delta V/V$ ) por unidad de presión ( $(\Delta V/V)/\Delta p$ ), es una constante, que viene determinada por las características elásticas del material, a través del módulo de elasticidad volumétrica o **módulo de compresibilidad**:

$$K = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V}$$

Para los sólidos, K es muy grande, para líquidos K es grande y para gases K es pequeño. El signo “-“, es debido a que los sentidos de las variaciones de presión y de volumen son contrarios, es decir ante un aumento de presión, el volumen disminuye.

Centrándonos, en el campo de los fluidos, si consideramos magnitudes elementales, si un determinado volumen de fluido (V) se somete a un aumento de presión (dp), el volumen se reduce en un determinado valor (dV), denominando **módulo de compresibilidad** del fluido a:

$$K = -V \frac{dp}{dV}$$

Un fluido poco compresible (líquidos) tiene alto módulo de compresibilidad y un fluido muy compresible (gases) tiene bajo módulo de compresibilidad. Para poder evaluar los cambios de presión y volumen (dP/dV), es necesario tener en cuenta el tipo de proceso de compresión: **isotermo** (a temperatura constante), **isentrópico** (adiabático sin efectos disipativos),... Lo que da lugar a la definición de los siguientes módulos:

$$\text{Módulo de compresibilidad isotermo: } K_T = -V \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T$$

$$\text{Módulo de compresibilidad isentrópico: } K_S = -V \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_S$$

Las ecuaciones anteriores se suelen expresar en función de términos de densidad en vez de volumen<sup>1</sup>, quedando como expresiones del módulo de compresibilidad:

$$K_T = \rho \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \quad K_S = \rho \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S$$

En el caso de líquidos, los dos módulos son prácticamente iguales; en cambio en gases, el módulo isotermo es siempre menor que el isentrópico. Así, agua a 20°C y 1 atm, tiene un módulo de compresibilidad de 2200 MPa; en cambio, aire a 20°C y 1 atm, tiene un módulo isotermo de 0,1013 MPa, y un módulo isentrópico de 0,1418 MPa.

<sup>1</sup>  $V=m/\rho$ ; como m es constante,  $dV=-m d\rho/\rho^2$ , con lo que  $-V/dV=\rho/d\rho$ . Evidentemente, ante un aumento de presión, la densidad aumenta

4.1.2. VELOCIDAD SÓNICA. Otra forma de **evaluar la compresibilidad de un fluido**, es la velocidad con la que se transmiten pequeñas perturbaciones en el seno del propio fluido; a esa velocidad se le denomina **velocidad sónica** o velocidad del sonido y viene determinada por:

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} = \sqrt{\frac{K_s}{\rho}}$$

Los fluidos compresibles tienen bajas velocidades sónicas y los fluidos incompresibles tienen altas velocidades sónicas; así a 20°C y 1atm, la velocidad del sonido en agua es de 1483,2 m/s, y la velocidad del sonido en aire es de 331,3 m/s.

Para obtener la expresión anterior, consideremos una perturbación de presión “ $\Delta p$ ” que se mueve a una velocidad “ $c$ ”, en el seno de un fluido en reposo a condiciones  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$ ; el paso del pulso de presión (de área constante) provoca variaciones de variables de estado y un ligero movimiento de partículas:

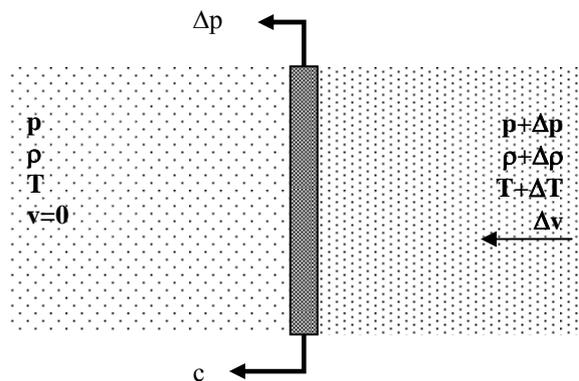


Fig.4.1. Pulso de presión en el seno de un fluido

Considerando un volumen de control entorno al pulso de presión, se puede obtener una expresión de la velocidad de la perturbación, a través de las ecuaciones de continuidad y de movimiento:

$$\text{Ec. Continuidad: } \left\{ \begin{array}{l} \dot{m}_E = \dot{m}_S \\ \rho_E v_{rE} A_E = \rho_S v_{rS} A_S \\ \rho c A = (\rho + \Delta \rho)(c - \Delta v) A \\ \Delta v = c \frac{\Delta \rho}{\rho + \Delta \rho} \end{array} \right.$$

$$\text{Ec. Movimiento: } \left\{ \begin{array}{l} F = \dot{m}(v_S - v_E) \\ F = pA - (p + \Delta p)A = -\Delta p \cdot A \\ \dot{m} = \rho c A \\ (v_S - v_E) = (v_{rS} - v_{rE}) = ((c - \Delta v) - c) = -\Delta v \\ -\Delta p = \rho c (-\Delta v) \\ \Delta p = \rho c \Delta v \end{array} \right.$$

Combinando los resultados de las dos ecuaciones, se tiene la expresión de la velocidad del pulso de presión:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta v = c \frac{\Delta \rho}{\rho + \Delta \rho} \\ \Delta p = \rho c \Delta v \end{array} \right| \dots \quad c = \sqrt{\left(\frac{\Delta p}{\Delta \rho}\right) \left(1 + \frac{\Delta \rho}{\rho}\right)}$$

Definiendo la velocidad sónica, como la velocidad de una perturbación infinitesimal, y considerando que el cambio de estado a través del pulso infinitesimal, es adiabático e irreversible, es decir isentrópico, se tiene:

$$a = \lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} c = \lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta p}{\Delta \rho}\right) \left(1 + \frac{\Delta \rho}{\rho}\right)} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$$

4.1.3. NÚMERO DE MACH. La velocidad sónica, no sólo evalúa la compresibilidad de un fluido, sino que permite clasificar los flujos, a través de la adimensionalización de la velocidad con la velocidad sónica:

$$\text{Ma} = \frac{v}{a} = \frac{v}{\sqrt{K_s/\rho}}$$

Una clasificación simple, lleva a tener flujos subsónicos, sónicos o supersónicos:

- Flujo subsónico:  $\text{Ma} < 1$
- Flujo sónico:  $\text{Ma} = 1$
- Flujo supersónico:  $\text{Ma} > 1$

Una clasificación más completa es:

- Flujo incompresible:  $\text{Ma} < 0,3$
- Flujo subsónico:  $0,3 < \text{Ma} < 0,8$
- Flujo transónico:  $0,8 < \text{Ma} < 1,2$
- Flujo supersónico:  $1,2 < \text{Ma} < 3,0$
- Flujo hipersónico:  $3,0 < \text{Ma}$

Cuando  $\text{Ma} < 0,3$ , las variaciones de densidad son relativamente pequeñas (menores del 5%); con lo que aunque el fluido sea un gas, puede considerarse como incompresible. Evidentemente en líquidos, la velocidad sónica es muy alta, y ello lleva a que el número de Mach sea siempre muy pequeño.

$$\begin{aligned} \Delta p &\approx \frac{1}{2}\rho v^2 \\ a &\approx \frac{\Delta p}{\Delta \rho} \\ \text{Ma} = \frac{v}{a} &= \frac{\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}}{\sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta \rho}}} = \sqrt{\frac{2\Delta \rho}{\rho}} \quad \text{Ma} < \sqrt{\frac{2 \cdot 5}{100}} = 0,316 \\ \frac{\Delta \rho}{\rho} &< \frac{5}{100} \end{aligned}$$

Cuando  $\text{Ma} < 0,8$ : en ninguna zona del flujo se producen ondas de choque (ver apartado 4.3.).

Con  $\text{Ma} > 0,8$ : se pueden producir ondas de choque, de intensidad creciente conforme aumenta el número de Mach.

Una consideración interesante es que en flujo externo, las fuerzas que el flujo ejerce sobre un objeto, tienen una dependencia muy diferenciada: a muy bajos Ma (estrictamente tendríamos que hablar de muy bajos números de Reynolds), el flujo sólo tiene que atravesar la propia geometría del objeto; conforme el Ma aumenta, el desorden provocado por la capa límite, hace que la interacción fluido-superficie se extienda a zonas alejadas del objeto; y finalmente conforme el flujo se aproxima a condiciones sónicas, la aparición de las irreversibilidades con grandes aumentos de entropía de las ondas de choque, hace que se tenga que superar la denominada “barrera del sonido” en donde se tiene una alta interacción flujo-geometría; para acabar en los flujos hipersónicos con la aparición de ondas de choque oblicuas.

## 4.2. FLUJO ISENTRÓPICO UNIDIMENSIONAL.

Consideremos un flujo unidimensional por un conducto de sección variable:  $A = A(x)$ . En una determinada sección, el fluido va a una velocidad media “ $v$ ”, con una presión absoluta “ $p$ ”, una temperatura absoluta “ $T$ ” y una densidad “ $\rho$ ”. El flujo es adiabático y sin efectos disipativos, es decir isentrópico.

### 4.2.1. ECUACIONES TERMODINÁMICAS.

1. Ec. Térmica de estado:  $p = p(\rho, T)$ ; para un gas ideal<sup>2</sup>:

$$p = \rho RT$$

2. Ec. Entálpica de estado:  $h = h(p, T)$ ; para un gas ideal de calor específico ( $c_p$ ) constante<sup>3</sup>:

$$h = c_p T$$

3. Ec. Entrópica de estado:  $s = s(p, T)$ ; para un gas ideal de calor específico ( $c_p$ ) constante

$$s = s_0 + c_p \ln \frac{T}{T_0} - R \ln \frac{p}{p_0}$$

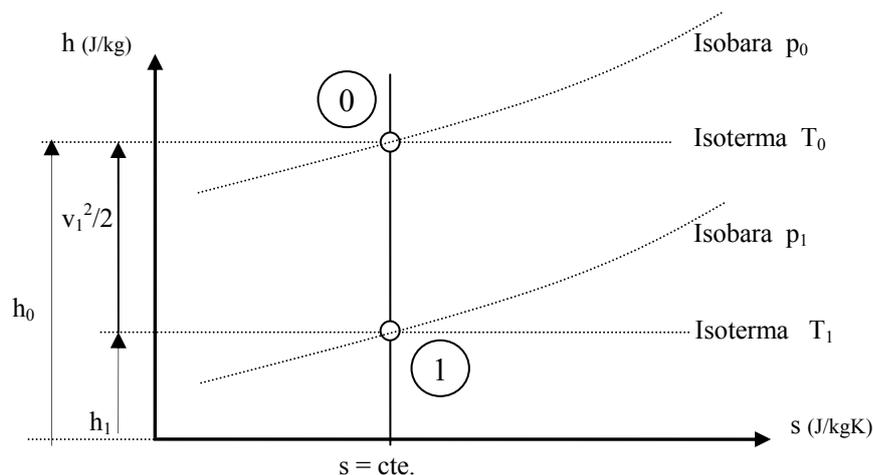
Particularizando para un proceso isentrópico:  $s = \text{cte.}$ , se tienen las relaciones:

$$pT^{\gamma/(\gamma-1)} = \text{cte.} \quad p\rho^{-\gamma} = \text{cte.}$$

4. Ec. Energía: Primer Principio de Termodinámica:  $\delta q - \delta w = d\left(h + \frac{v^2}{2} + gz\right)$ ; para un proceso adiabático sin disipación ni trabajo y despreciando la energía potencial (usual en gases), se tiene:

$$h + \frac{v^2}{2} = \text{cte.} = h_0$$

En donde “ $h_0$ ” es la máxima entalpía que puede adquirir el fluido cuando se le lleva al reposo isentrópico. Precisamente éste estado de remanso o de estancamiento, es el estado de referencia que se suele tomar en flujo compresible: en una evolución isentrópica el flujo siempre tiene presiones y temperaturas inferiores a las correspondientes al **estado de remanso**.



<sup>2</sup> En un **gas ideal**, según la teoría cinética de gases:  $p = \rho v^2$ , en donde “ $v$ ” es la velocidad promedio en la agitación térmica de una molécula, que viene dada por la ecuación de BOLTZMAN:  $v^2 = \kappa T / m$ , siendo  $\kappa$  la constante de BOLTZMAN ( $\kappa = 1,380\ 658\ 10^{-23}$  J/K),  $T$  la temperatura absoluta y  $m$  la masa de la molécula ( $m = M / N_A$ ,  $M$  es la masa molecular y  $N_A$  el número de Avogadro  $= 6,022\ 136\ 10^{23}$ ), con todo se tiene, la ecuación térmica de estado para el gas ideal:  $p = \rho \kappa T / m = \rho \kappa T / (M / N_A) = \rho ((\kappa \cdot N_A) / M) T$ , en donde  $\kappa \cdot N_A$  es la constante universal de los gases:  $R_0 = \kappa \cdot N_A = 8314$  J/kmolK; denominado como constante de cada gas.  $R = R_0 / M$ ; así para el caso del aire ideal, de masa molecular 28,97 kg/kmol, se tiene una constante:  $R = 287$  J/kgK. Con todo se tiene la ecuación térmica de estado:  **$P = \rho R T$** .

<sup>3</sup> El calor específico a presión constante se define por:  $c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p$

5. Ec. Sónica: velocidad de una perturbación infinitesimal en el seno del fluido:

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \quad \text{Gas Ideal: } a = \sqrt{\gamma RT}$$

Las variables  $p$ ,  $\rho$  y  $T$  en cualquier sección, se pueden expresar en función de las variables de estado en el punto de remanso y del número de Mach en dicha sección:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2 \quad \frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

Si consideramos como exponente isentrópico<sup>4</sup>, el correspondiente al aire ( $\gamma=1,4$ ), las relaciones anteriores son:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + 0,2Ma^2 \quad \frac{p_0}{p} = (1 + 0,2Ma^2)^{3,5} \quad \frac{\rho_0}{\rho} = (1 + 0,2Ma^2)^{2,5}$$

Aparte del estado de remanso como estado de referencia; es muy interesante determinar las características del denominado **estado crítico**, en donde la velocidad del fluido es la sónica, es decir su número de Mach es 1. A partir de las ecuaciones anteriores, se tienen las variables del estado crítico:

$$T^* = \frac{T_0}{1,2} \quad p^* = \frac{p_0}{1,2^{3,5}} = \frac{p_0}{1,8929} \quad \rho^* = \frac{\rho_0}{1,2^{2,5}} = \frac{\rho_0}{1,5774}$$

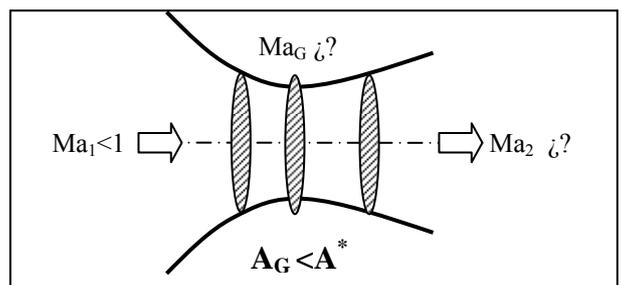
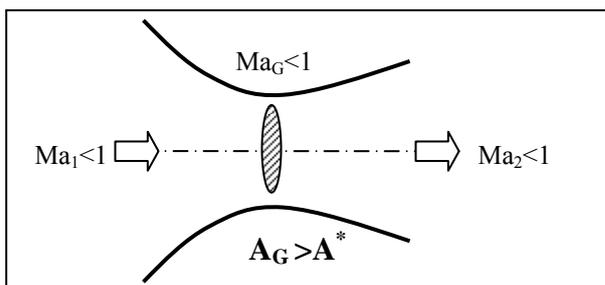
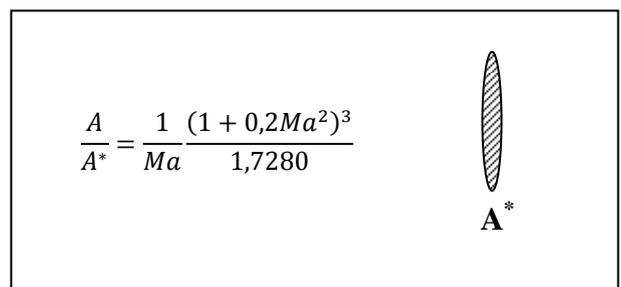
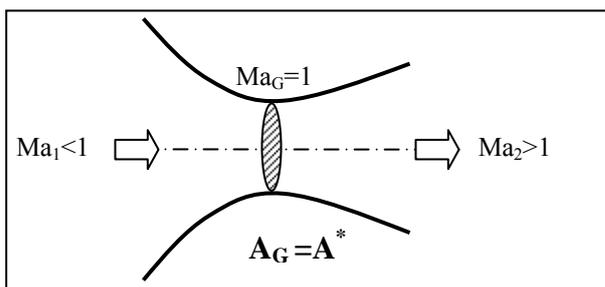
Siendo sobre todo de gran importancia, la relación de áreas, entre una sección genérica de área  $A$  y la sección en condiciones críticas de área  $A^*$ :

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{Ma} \left( \frac{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)Ma^2}{\frac{1}{2}(\gamma + 1)} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

Particularizado para  $\gamma = 1,4$ , queda:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{Ma} \frac{(1 + 0,2Ma^2)^3}{1,7280}$$

La relación tiene un mínimo en  $Ma=1$ , es decir: si el proceso es isentrópico ninguna sección debe tener área menor que la crítica. Si existiese una sección menor que la crítica, el tránsito hasta alcanzar la sección crítica, no es isentrópico. En el caso de toberas convergente-divergentes, si el flujo de entrada es subsónico, para asegurar un flujo supersónico en la salida, la sección de la garganta debe ser la crítica. Si la sección en la garganta es mayor que la crítica, en ninguna sección se dan condiciones sónicas, aunque en la garganta se alcanza un máximo de  $Ma$ , siempre menor que 1. Si la sección de la garganta es menor que la crítica, tanto aguas arriba como aguas debajo de la garganta, se tiene la sección crítica; en la sección aguas arriba, se tiene condición sónica, pero aguas abajo no se puede calcular las condiciones con las ecuaciones isentrópicas, pues en el paso entre ambas el flujo es con irreversibilidades (ondas de choque).



<sup>4</sup> El exponente isentrópico  $\gamma$ , es igual a la relación de calores específicos:  $\gamma = c_p/c_v$ .

4.2.2. ECUACIONES MECÁNICAS.

1. Ec. Continuidad: Flujo estacionario unidimensional:

$$\dot{m} = \rho Av = cte. \rightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dv}{v} = 0$$

2. Ec. Movimiento: Flujo isentrópico estacionario unidimensional en tubo de corriente:

$$dp + \rho v dv = 0$$

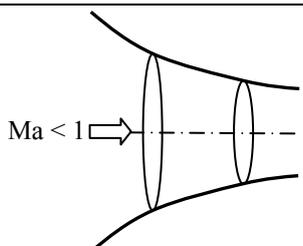
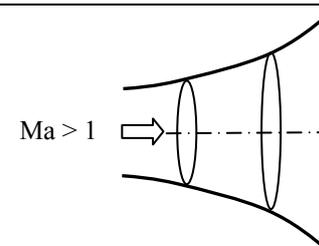
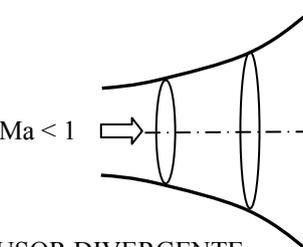
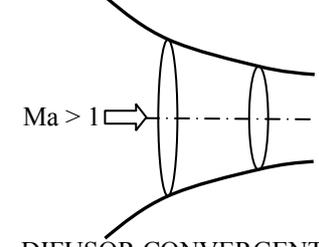
3. Ec. Sónica: Flujo isentrópico:

$$dp = a^2 d\rho$$

4. Relaciones v,p,A: las ecuaciones anteriores se pueden expresar en función del número de Mach, quedando:

$$\frac{dv}{v} = \frac{-dp}{\rho v^2} = \frac{dA}{A} \frac{1}{Ma^2 - 1}$$

Observando que los signos de las variaciones, cambian con  $Ma < 1$  ó  $Ma > 1$ . Así las geometrías de toberas<sup>5</sup> y difusores<sup>6</sup> son totalmente distintas en función de que el flujo de entrada sea subsónico o supersónico:

	Flujo de entrada SUBSÓNICO	Flujo de entrada SUPERSÓNICO
TOBERA $dv > 0$	$dv > 0$ $dp < 0$ $dA < 0$  TOBERA CONVERGENTE	$dv > 0$ $dp < 0$ $dA > 0$  TOBERA DIVERGENTE
DIFUSOR $dp > 0$	$dv < 0$ $dp > 0$ $dA > 0$  DIFUSOR DIVERGENTE	$dv < 0$ $dp > 0$ $dA < 0$  DIFUSOR CONVERGENTE

5. Caudal másico: para un gas ideal se puede expresar en función del estado de estancamiento, o del Mach<sup>7</sup>

$$\dot{m} = A \frac{p_0}{\sqrt{RT_0}} \sqrt{\gamma} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{10/\gamma} \left( 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{2/\gamma} \right)$$

$$\dot{m} = A \frac{p_0}{\sqrt{RT_0}} \sqrt{1,4} \frac{Ma}{(1 + 0,2Ma^2)^3}$$

También se puede obtener que el máximo caudal másico se obtiene para  $Ma=1$ ; con lo cual el caudal máximo que puede atravesar un conducto se da cuando en la garganta se tiene condiciones sónicas (su área es igual a la crítica), se dice que el conducto está **bloqueado** y no puede haber un caudal másico mayor, a no ser que se agrande la garganta; si la garganta es menor que la crítica el caudal másico que atraviesa el conducto disminuye.

<sup>5</sup> Una TOBERA, es un conducto con la geometría adecuada para que la velocidad aumente con el avance del flujo:  $dv > 0$ .

<sup>6</sup> Un DIFUSOR, es un conducto con la geometría adecuada para que la presión aumente con el avance del flujo:  $dp > 0$ .

<sup>7</sup> Desarrollo propio (JMC).

### 4.3. ONDAS DE CHOQUE.

Con flujo supersónico, en función de la geometría y de las condiciones aguas abajo, se pueden producir bruscos cambios de muy poco espesor (del orden de  $10^{-6}$  m) a flujo subsónico, de marcado carácter irreversible y por tanto con aumento de entropía, equivalentes a discontinuidades en el flujo: es la denominada **onda de choque normal**. En donde se tienen altos gradientes de presión y de temperatura, en el sentido del flujo:  $p_2 > p_1$  y  $T_2 > T_1$ .

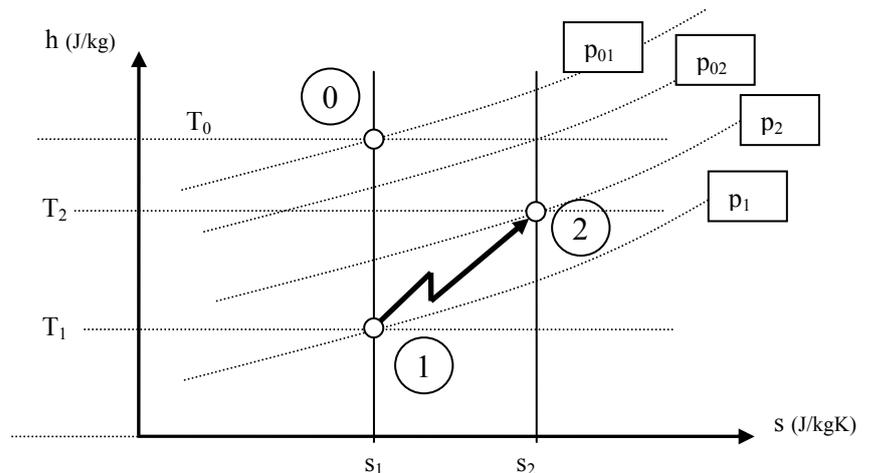
De especial importancia en **flujo alrededor de objetos** a velocidades supersónicas, en donde se provoca una onda de choque aguas arriba del borde de ataque; la geometría de la onda de choque es perpendicular (normal) a las líneas de corriente del flujo incidente; lo que provoca una alta perturbación del flujo aguas arriba del objeto.

En el caso de un objeto a velocidad subsónica, que se quiera llevar a velocidad supersónica, conforme se va acercando a condiciones sónicas: el flujo se inicia convergente en el borde de ataque y finaliza divergente en el borde de estela, lo que lleva a que en alguna parte de la zona divergente, se empiece a tener flujo supersónico, en donde se pueden tener ondas de choque de alta disipación energética, lo que lleva a que el coeficiente de arrastre aumente bruscamente, siendo necesario aportar potencias muy altas para atravesar la denominada *barrera del sonido*.

Debido al aumento de temperatura en una onda de choque de muy poco espesor, los gradientes térmicos son elevados y siempre en el sentido del flujo ( $T_2 > T_1$ ), lo que implica alta velocidad de transmisión de calor. En la portada, se visualiza un avión rompiendo la barrera del sonido, en donde a mitad fuselaje se ha producido una onda de choque normal, que transfiere calor de las partículas posteriores a la onda de choque hacia las anteriores, lo que hace que experimenten un enfriamiento súbito, y como las partículas son de aire húmedo, se provoca la condensación de las partículas de vapor de agua.

#### 4.3.1. RELACIONES DE RANKINE-HUGONIOT.

A partir de las ecuaciones de continuidad y energía; y considerando un gas ideal, se obtienen las siguientes relaciones<sup>8</sup> que dan los cambios de las propiedades a través de una onda de choque, que fundamentalmente es una onda con aumento de presión ( $p_2 > p_1$ ) y de temperatura ( $T_2 > T_1$ ) de muy poco espesor ( $A_1 = A_2$ ) y con aumento de entropía:



$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{7Ma_1^2 - 1}{6}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + 0,2Ma_1^2}{4,8Ma_1^2} \cdot \frac{7Ma_1^2 - 1}{6}$$

Además, la onda de choque decelera bruscamente una corriente supersónica ( $Ma_1 > 1$ ) a subsónica ( $Ma_2 > 1$ ):

$$Ma_2^2 = \frac{1 + 0,2Ma_1^2}{1,4Ma_1^2 - 0,2}$$

Finalmente, es importante destacar, que una onda de choque provoca que el área crítica aumente y que la presión de estancamiento disminuya:

$$\frac{A_2^*}{A_1^*} = \frac{Ma_2}{Ma_1} \left( \frac{1 + 0,2Ma_1^2}{1 + 0,2Ma_2^2} \right)^3$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{1 + 1,4Ma_1^2}{1 + 1,4Ma_2^2} \left( \frac{1 + 0,2Ma_2^2}{1 + 0,2Ma_1^2} \right)^{3,5}$$

<sup>8</sup> Se dan las relaciones de Rankine-Hugoniot para el caso de un gas ideal biatómico de relación de calores específicos:  $\gamma = 1,4$

**P.4.1. ÁREA CRÍTICA.** En una tobera el flujo va aumentando de velocidad conforme avanza ( $dv > 0$ ). Si el flujo de entrada es subsónico, para que el flujo de salida sea supersónico, la geometría de la tobera debe ser convergente-divergente y el área de la garganta debe ser la correspondiente al área crítica; en caso contrario, no se alcanzan condiciones sónicas en la garganta y el flujo de salida es subsónico. A partir de los datos:

- DETERMINE:
1. Variables en la sección de entrada: densidad, caudal másico y número de Mach.
  2. Variables en el punto de remanso.
  3. Área crítica.
  4. Variables en la sección de salida, si la garganta de la tobera tiene área crítica.
  5. Variables en la sección de salida, si el área de la garganta es el 105% de la crítica.

DATOS: Sección de entrada:  $A_1 = 500 \text{ cm}^2$ ;  $v_1 = 180 \text{ m/s}$ ;  $p_1 = 5 \text{ bar}$ ;  $t_1 = 470 \text{ K}$ .  
Sección de salida:  $A_2 = 360 \text{ cm}^2$

RESOLUCIÓN:

1. VARIABLES EN LA SECCIÓN DE ENTRADA:

$$\rho_1 = \frac{p_1}{RT_1} = \frac{5 \cdot 10^5}{287 \cdot 470} = 3,707 \text{ kg/m}^3$$

$$\dot{m} = \rho_1 V_1 A_1 = 3,707 \cdot 180 \cdot 500 \cdot 10^{-4} = 33,361 \text{ kg/s}$$

$$Ma_1 = \frac{v_1}{\sqrt{\gamma RT_1}} = \frac{180}{\sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 470}} = \frac{180}{434,564} = 0,414$$

2. VARIABLES EN EL PUNTO DE REMANSO:

$$T_0 = T_1(1 + 0,2Ma_1^2) = 470(1 + 0,2 \cdot 0,414^2) = 486,127 \text{ K}$$

$$\rho_0 = \rho_1(1 + 0,2Ma_1^2)^{2,5} = 3,707(1 + 0,2 \cdot 0,414^2)^{2,5} = 4,033 \text{ kg/m}^3$$

$$p_0 = p_1(1 + 0,2Ma_1^2)^{3,5} = 5(1 + 0,2 \cdot 0,414^2)^{3,5} = 5,627 \text{ bar}$$

Es decir, la presión máxima que puede tener el fluido en un proceso isentrópico, será de 5,627 bar; y la temperatura máxima de 486,127 K.

3. ÁREA CRÍTICA:

$$A^* = A_1 \frac{1,728Ma_1}{(1 + 0,2Ma_1^2)^3} = 500 \frac{1,728 \cdot 0,414}{(1 + 0,2 \cdot 0,414^2)^3} = 323,264 \text{ cm}^2$$

4. VARIABLES EN LA SECCIÓN DE SALIDA (con paso previo por la sección crítica en la garganta):

La relación del área de salida con la crítica, depende del número de Mach en la salida:

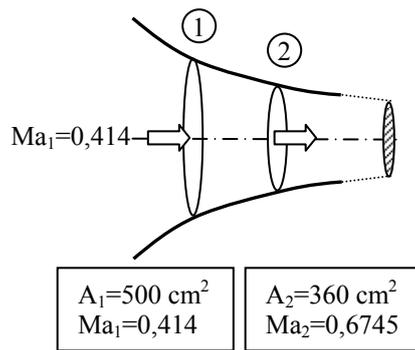
$$\frac{A_2}{A^*} = \frac{(1 + 0,2Ma_2^2)^3}{1,728Ma_2} = \frac{360}{323,264} = 1,114$$

Ecuación con las siguientes raíces reales: 0,6745 y 1,3985.

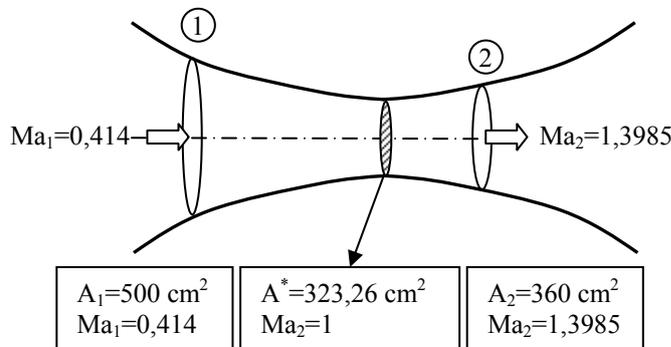
La ecuación anterior es un polinomio de grado 6 en el número de Mach, lo que da 6 raíces: 2 reales y 4 imaginarias; el polinomio es:

$$0,008Ma^6 + 0,12Ma^4 + 0,6Ma^2 - \left(1,728 \frac{A}{A^*}\right)Ma + 1 = 0$$

La primera solución ( $Ma_2=0,6745$ ) corresponde a flujo subsónico; es decir, si el flujo pasa de la sección de entrada de  $500\text{ cm}^2$  a la de salida de  $360\text{ cm}^2$ , sin pasar por la sección crítica, el flujo de salida es subsónico.



La segunda solución ( $Ma_2=1,3985$ ) corresponde a flujo supersónico; es decir, si el flujo pasa de la sección de entrada de  $500\text{ cm}^2$  a la de salida de  $360\text{ cm}^2$ , pasando por la sección crítica, el flujo de salida es supersónico



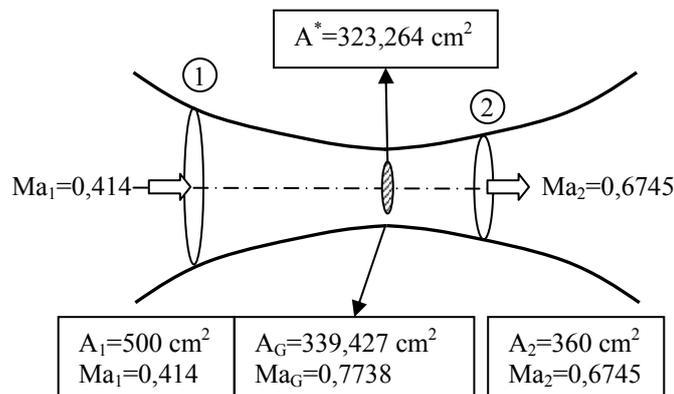
5. VARIABLES EN LA SECCIÓN DE SALIDA CON GARGANTA NO SÓNICA.

La relación del área de garganta con la crítica, da el valor del número de Mach en la garganta no sónica:  $Ma_G$

$$\frac{A_G}{A^*} = \frac{(1 + 0,2Ma_G^2)^3}{1,728Ma_G} = \frac{1,05 A^*}{A^*} = 1,05$$

Con dos soluciones reales: 0,7738 y 1,2589; la segunda no tiene sentido porque en una garganta no sónica el flujo es subsónico; con lo cual en la garganta se tiene  $Ma_G = 0,7738$ .

El flujo subsónico que pasa por la garganta, va hacia la sección de salida por una geometría divergente, con lo que el número de Mach debe ir disminuyendo, y en la sección 2, se debe tener el número de Mach correspondiente a la solución subsónica, correspondiente al área de  $360\text{ cm}^2$ , es decir:  $Ma_2 = 0,6745$ :



**P.4.2. ONDA DE CHOQUE.** En un turborreactor, los gases de combustión se descargan en una tobera convergente-divergente; si la sección de la garganta tiene área crítica, el flujo que pasa por la garganta es sónico y puede evolucionar a supersónico por la geometría divergente. El chorro supersónico se descarga a presión atmosférica, con lo que la presión de salida de la tobera será la atmosférica; en función del valor de la presión de salida con respecto a la de estancamiento ( $p_0/p_s$ ) se pueden tener ondas de choque en la zona divergente lo que impide que el flujo de salida sea supersónico. Para un valor concreto de la relación de presiones, no se produce ninguna onda de choque, y se tiene una tobera adaptada que genera un chorro de salida supersónico. A partir de los datos:

- DETERMINE:
1. Condiciones de remanso.
  2. Condiciones críticas.
  3. Condiciones a la salida para tobera adaptada: número de Mach de diseño.
  4. Presión exterior para que se tenga una onda de choque en la salida.
  5. Presión exterior para que se tenga una onda de choque antes de la salida.
  6. Condiciones a la salida, si se produce una onda de choque entre la garganta y la salida.

DATOS: Caudal másico de gases de combustión ( $\gamma=1,4$ ): 39 kg/s  
 Sección de entrada de la tobera:  $A_E = 0,6 \text{ m}^2$ ;  $Ma_E = 0,4$ ;  $T_E = 2000 \text{ K}$ .  
 Sección en donde se produce la onda de choque:  $A_1=A_2=(A^*+A_S)/2$ .  
 Ambiente: presión atmosférica a una altura de vuelo de 10000 m:  $p_{\text{atm}} = 26,42 \text{ kPa}$

RESOLUCIÓN:

1. CONDICIONES DE REMANSO: conociendo la temperatura y el número de Mach, se tiene la temperatura de remanso:

$$\frac{T_0}{T_E} = 1 + 0,2Ma_E^2$$

$$T_0 = T_E(1 + 0,2Ma_E^2) = 2000(1 + 0,2 \cdot 0,4^2) = 2064 \text{ K}$$

La presión de remanso se puede obtener a partir del caudal másico, y de las condiciones de entrada (E):

$$\dot{m} = A \frac{p_0}{\sqrt{RT_0}} \sqrt{1,4} \frac{Ma}{(1 + 0,2Ma^2)^3}$$

$$p_0 = \frac{\dot{m} \sqrt{RT_0}}{A_E \sqrt{1,4}} \cdot \frac{(1 + 0,2Ma_E^2)^3}{Ma_E} = \frac{39 \sqrt{287 \cdot 2064}}{0,6 \sqrt{1,4}} \cdot \frac{(1 + 0,2 \cdot 0,4^2)^3}{0,4} = 116,18 \text{ kPa}$$

2. CONDICIONES CRÍTICAS: el área crítica se obtiene a partir de las condiciones de la sección de entrada:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{Ma} \frac{(1 + 0,2Ma^2)^3}{1,7280}$$

$$A^* = A_E \cdot Ma_E \frac{1,7280}{(1 + 0,2Ma_E^2)^3} = 0,6 \cdot 0,4 \frac{1,7280}{(1 + 0,2 \cdot 0,4^2)^3} = 0,3773 \text{ m}^2$$

La temperatura y la presión en condiciones críticas, se obtienen a partir de las de remanso:

$$T^* = \frac{T_0}{1,2} \quad p^* = \frac{p_0}{1,2^{3,5}} = \frac{p_0}{1,8929}$$

$$T^* = \frac{T_0}{1,2} = \frac{2064}{1,2} = 1720 \text{ K} \quad p^* = \frac{p_0}{1,2^{3,5}} = \frac{116,18}{1,2^{3,5}} = 81,38 \text{ kPa}$$

Como la presión crítica es mayor que la de salida (atmosférica = 26,42 kPa), a partir de la garganta (en una tobera adaptada de área igual a la crítica) el flujo será supersónico hasta la descarga en toberas adaptadas; en caso contrario entre la garganta y la salida aparecen ondas de choque, que llevan el flujo de salida a subsónico.

3. CONDICIONES DE SALIDA PARA TOBERA ADAPTADA: la presión de salida debe ser la presión atmosférica, con lo que se tiene que el número de Mach de diseño (tobera adaptada) será:

$$\frac{p_0}{p_{\text{exterior}}} = (1 + 0,2Ma_D^2)^{3,5} = \frac{116,18}{26,42} = 4,397$$

De donde se obtiene que el número de Mach de diseño es:

$$Ma_D = \sqrt{\frac{4,397^{1/3,5} - 1}{0,2}} = 1,623$$

Con lo cual el área de salida debe ser:

$$\frac{A_S}{A^*} = \frac{1}{Ma_D} \frac{(1 + 0,2Ma_D^2)^3}{1,7280}$$

$$A_S = A^* \frac{1}{Ma_D} \frac{(1 + 0,2Ma_D^2)^3}{1,7280} = 0,3773 \frac{1}{1,623} \frac{(1 + 0,2 \cdot 1,623^2)^3}{1,7280} = 0,4788 \text{ m}^2$$

Es decir, el flujo entra subsónico ( $Ma_E = 0,4$ ), evoluciona a sónico por la parte convergente, hasta llegar en condiciones sónica a la garganta (de área igual a la crítica), a partir de la cual, por la parte divergente va aumentando su Ma, hasta salir a la presión atmosférica y a flujo supersónico ( $Ma_D = 1,623$ ). La presión correspondiente al estado de diseño, se le denomina presión de diseño:  $p_D = 26,42 \text{ kPa}$

4. PRESIÓN EXTERIOR PARA TENER UNA ONDA DE CHOQUE EN LA SECCIÓN DE SALIDA: podemos aplicar las relaciones de Rankine-Hugoniot de cambio de estado en una onda de choque, justamente con el estado aguas arriba (1) igual al de diseño:  $Ma_1 = 1,623$  y  $p_1 = 26,42 \text{ kPa}$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{7Ma_1^2 - 1}{6} = \frac{7 \cdot 1,623^2 - 1}{6} = 2,9065 \rightarrow p_2 = 2,9065p_1 = 2,9065 \cdot 26,42 = 76,79 \text{ kPa}$$

Ésta presión tras la onda de choque en la salida, se denomina presión límite inferior de ondas de choque en la zona divergente:  $p_{\text{LIOC}}$ .

5. PRESIÓN EXTERIOR PARA TENER UNA ONDA DE CHOQUE ANTES DE LA SECCIÓN DE SALIDA: es decir entre la garganta sónica y la sección de salida. Como hemos visto en el apartado anterior, la presión exterior a la que se provoca una onda de choque en la salida es de 76,79 kPa; si la presión exterior aumenta por encima del valor anterior, se provoca una onda de choque entre la garganta y la salida, que tiene como consecuencia que el flujo de salida sea subsónico.

Conforme el valor de la presión va aumentando la onda de choque se provoca más cerca de la garganta, hasta un determinado valor límite de la presión exterior, en donde no habría onda de choque, pero el flujo de salida es subsónico. Esta presión, se denomina límite superior de ondas de choque en la zona divergente:  $p_{\text{LSOC}}$

La presión límite de flujo subsónico ( $p_{\text{LSOC}}$ ) se determina por la solución subsónica de la relación de áreas con el número de Mach en la sección de salida:

$$\frac{A_S}{A^*} = \frac{1}{Ma_S} \frac{(1 + 0,2Ma_S^2)^3}{1,7280} = \frac{0,4788}{0,3773} = 1,269$$

Las soluciones reales son: 0,541 y 1,623. El solución subsónica es  $Ma_S = 0,541$ , siendo su presión:

$$p_{\text{LSOC}} = \frac{p_0}{(1 + 0,2Ma^2)^{3,5}} = \frac{116,18}{(1 + 0,2 \cdot 0,541^2)^{3,5}} = 95,21 \text{ kPa}$$

6 . CONDICIONES A LA SALIDA, SI SE PRODUCE UNA ONDA DE CHOQUE ENTRE LA GARGANTA Y LA SALIDA. **Como dato**, se tiene que el área de la sección en donde se produce la onda de choque, es el valor medio entre el área de la garganta y la sección de salida:

$$A_1 = \frac{A^* + A_S}{2} = \frac{0,3773 + 0,5376}{2} = 0,4575 \text{ m}^2$$

Conociendo el área de la sección en donde se produce la onda de choque, se puede determinar las condiciones aguas arriba de la onda (1):

$$\frac{A_1}{A^*} = \frac{1}{Ma_1} \frac{(1 + 0,2Ma_1^2)^3}{1,7280} = \frac{0,4575}{0,3773} = 1,2124$$

Las soluciones reales son: 0,580 y 1,551; como la onda de choque se inicia con  $Ma > 1$ , la solución supersónica es la que nos da el número de Mach aguas arriba de la onda de choque:  **$Ma_1 = 1,551$** .

A partir de las relaciones de Rankine-Hugoniot, se tiene que el número de Mach agua debajo de la onda de choque será:

$$Ma_2 = \sqrt{\frac{1 + 0,2Ma_1^2}{1,4Ma_1^2 - 0,2}} = \sqrt{\frac{1 + 0,2 \cdot 1,551^2}{1,4 \cdot 1,551^2 - 0,2}} = 0,6838$$

En cuanto a presiones, para calcular la presión en la sección (1) se tiene en cuenta que su presión de estancamiento es la de antes de la formación de la onda de choque:

$$p_1 = \frac{p_{01}}{(1 + 0,2Ma_1^2)^{3,5}} = \frac{116,18}{(1 + 0,2 \cdot 1,551^2)^{3,5}} = 29,38 \text{ kPa}$$

En cambio, para determinar la presión en la sección (2), hay que tener en cuenta que la presión de remanso ha disminuido ( $p_{01} > p_{02}$ ); no obstante se puede determinar la relación  $p_2/p_1$  en función del número de Mach en (1):

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{7Ma_1^2 - 1}{6} = \frac{7 \cdot 1,551^2 - 1}{6} = 2,64 \quad p_2 = 2,64p_1 = 2,64 \cdot 29,38 = 77,56 \text{ kPa}$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_1} \left( \frac{1 + 0,2Ma_2^2}{1 + 0,2Ma_1^2} \right)^{3,5} = 2,64 \left( \frac{1 + 0,2 \cdot 0,6838^2}{1 + 0,2 \cdot 1,551^2} \right)^{3,5} = 0,913$$

$$p_{02} = 0,913p_{01} = 0,913 \cdot 116,18 = 106,06 \text{ kPa}$$

En cuanto a temperaturas en la onda de choque, no hay cambio de temperatura de estancamiento por conservación de energía:  $T_{01} = T_{02} = T_0$ ; con lo que se tiene:

$$T_1 = \frac{T_0}{1 + 0,2Ma_1^2} = \frac{2064}{1 + 0,2 \cdot 1,551^2} = 1393,54 \text{ K} \quad T_2 = \frac{T_0}{1 + 0,2Ma_2^2} = \frac{2064}{1 + 0,2 \cdot 0,6838^2} = 1887,49 \text{ K}$$

Con todo el aumento de entropía provocado por la onda de choque es:

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R \ln \frac{p_2}{p_1} = 1005 \cdot \ln \frac{1887,49}{1393,54} - 287 \cdot \ln \frac{77,56}{29,38} = 26,32 \text{ J/kgK}$$

Para determinar el número de Mach por la sección de salida es importante destacar, que una onda de choque provoca que el área crítica aumente:

$$A_2^* = A_1^* \frac{Ma_2}{Ma_1} \left( \frac{1 + 0,2Ma_1^2}{1 + 0,2Ma_2^2} \right)^3 = 0,3773 \frac{0,6838}{1,551} \left( \frac{1 + 0,2 \cdot 1,551^2}{1 + 0,2 \cdot 0,6838^2} \right)^3 = 0,4133 \text{ m}^2$$

Con lo que se puede determinar el número de Mach (evidentemente subsónico) por la sección de salida:

$$\frac{A_s}{A_2^*} = \frac{1}{Ma_s} \frac{(1 + 0,2Ma_s^2)^3}{1,7280} = \frac{0,5375}{0,4133} = 1,3$$

Las soluciones reales son: 0,522 y 1,659; con lo que por la sección de salida, el flujo sale subsónico a un número de Mach:  **$Ma_s = 0,522$** .

Finalmente la presión del chorro de salida es:

$$p_s = \frac{p_{02}}{(1 + 0,2Ma_s^2)^{3,5}} = \frac{106,06}{(1 + 0,2 \cdot 0,522^2)^{3,5}} = 88,08 \text{ kPa}$$

Comprobando que está en el rango de formación de ondas de choque: entre 76,79 kPa y 95,21 kPa

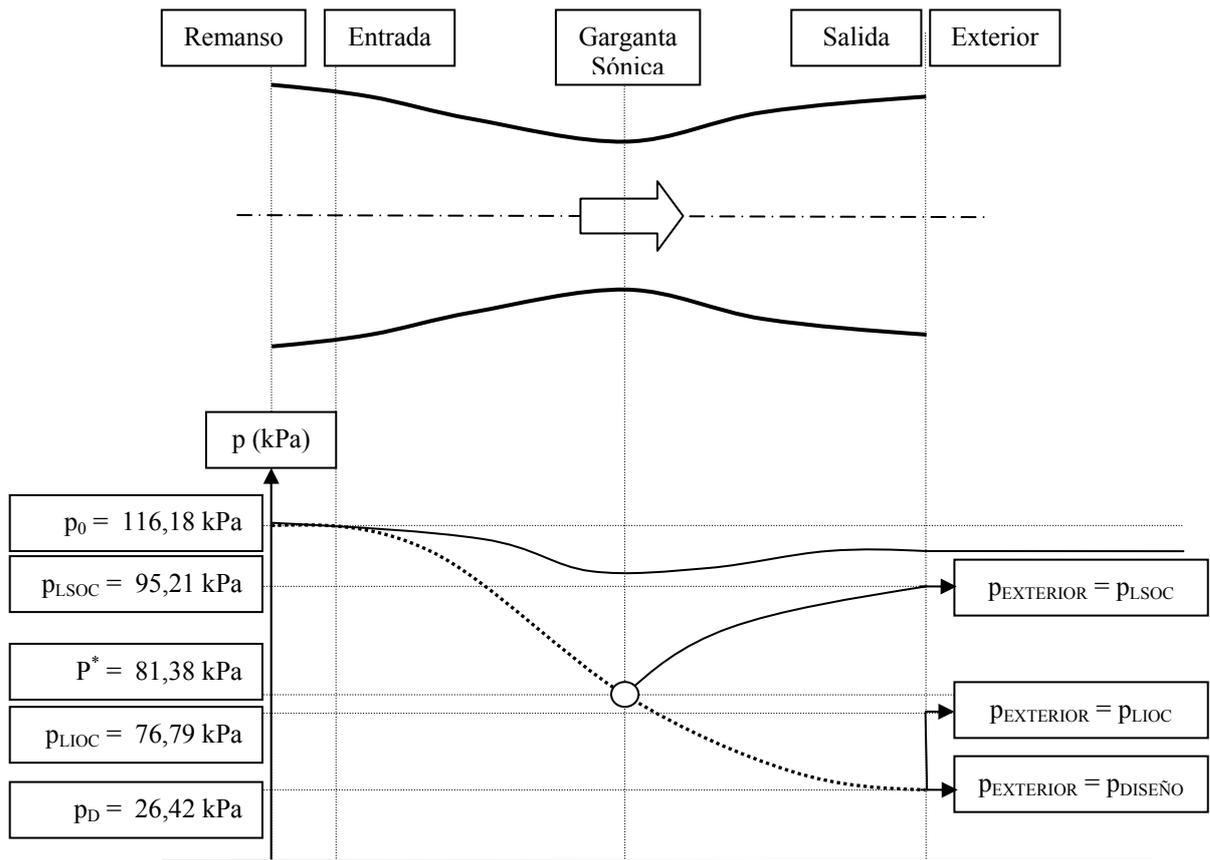


Gráfico de la evolución axial de la presión del flujo a lo largo de la tobera, en función de la presión exterior a la que se descarga el chorro

Las presiones que aparecen en el gráfico son:

$p_0$  = presión de remanso, la que alcanza el flujo es una parada isentrópica.

$p_{EX}$  = presión exterior donde se descarga el chorro.

$p_{LSOC}$  = presión en la sección de salida límite superior de formación de ondas de choque en la zona divergente.

$p_{LSIC}$  = presión en la sección de salida límite inferior de formación de ondas de choque en la zona divergente.

$p_{DISEÑO}$  = presión en la sección de salida, que provoca un flujo de salida supersónico, sin formación de ondas de choque normales en el interior de la zona divergente, ni de formación de ondas de choque transversales en el chorro de salida.

	Zona convergente	Garganta	Zona divergente	salida
$p_0 > p_{EX} > p_{LSOC}$	Flujo subsónico Ma aumentando	Subsónica Ma máximo	Flujo subsónico Ma disminuyendo	Subsónica Caudal no máximo
$p_{LSOC} > p_{EX} > p_{LIOC}$	Flujo subsónico Ma aumentando	Sónica Ma = 1	Onda de choque Ma supersónico aumentando hasta la onda de choque Ma subsónico disminuyendo después de la onda de choque	Subsónica Caudal máximo Onda Choque normal: $p_{EX} = p_{LIOC}$
$p_{LIOC} > p_{EX} > p_{DISEÑO}$	Flujo subsónico Ma aumentando	Sónica Ma = 1	Flujo supersónico Ma aumentando	Supersónica Caudal máximo Ondas Choque transversales de compresión
$p_{DISEÑO} = p_{EX}$	Flujo subsónico Ma aumentando	Sónica Ma = 1	Flujo supersónico Ma aumentando	Supersónica
$p_{DISEÑO} > p_{EX}$	Flujo subsónico Ma aumentando	Sónica Ma = 1	Flujo supersónico Ma aumentando	Supersónica Ondas Choque transversales de expansión

FLUJO EN UNA TOBERA CONVERGENTE-DIVERGENTE:  
en función de la presión exterior, se tienen distintos comportamientos del flujo.