Aerodinámica General I

Anteproyecto (2006)

Performance del el avión

El proyecto de un avión se puede presentar bajo el aspecto siguiente:
Una aeronave bajo determinadas condiciones de carga sea capaz de dar las mejores prestaciones para una misión determinada.

1) Partiendo de datos preliminares valorativos como:

a) - Carga alar
- Relación peso potencia

} Fija las condiciones del avión

b) - Alargamiento } Expresa la conformación del elemento sustentador

c) - Utilización de una planta motriz y velocidades o velocidad a la que se pretende volar.

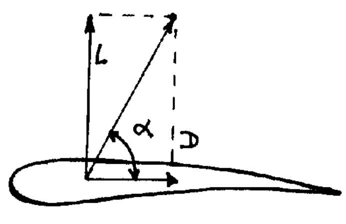
(Velocidad) Es condición inicial de la misión relacionado con la carga alar.
(Potencia) Elemento propulsor; determina el proyecto.

2) Elementos que componen un avión.

a) Elemento sustentador; puede también considerarse el equilibrador
b) Grupo moto - propulsor
c) Elemento contenedor de piloto, pasajeros, motor carga, etc.

3) La potencia necesaria para hacer avanzar un avión en vuelo a determinada velocidad es proporcional a ésta última al peso, al "frotamiento o resistencia"

"Dicho frotamiento es como si el peso tuviera que sostenerse en un apoyo sólido y es la tangente del ángulo formado por la resultante de las fuerzas aerodinámicas con la componente normal a la trayectoria que equilibra el peso".



$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{L}{D} = E = \text{eficiencia}$$

Cuando hacemos D/L = 1/E se define como "calidad"

La velocidad V se logrará como el producto de la calidad por el rendimiento de la hélice así:

Wm = pot.
T = tracción
V = velocidad
η = rendimiento de la hélice
L = sustentación
D = resistencia
W = peso

$$T.V = \eta.Wm$$

si en el vuelo rectilíneo: T = D

$$D.V = \eta.Wm$$

Considerando la calidad

$$\frac{D}{L} = \frac{1}{E}$$

para L = W

$$V = E.\eta.\frac{Wm}{W}$$

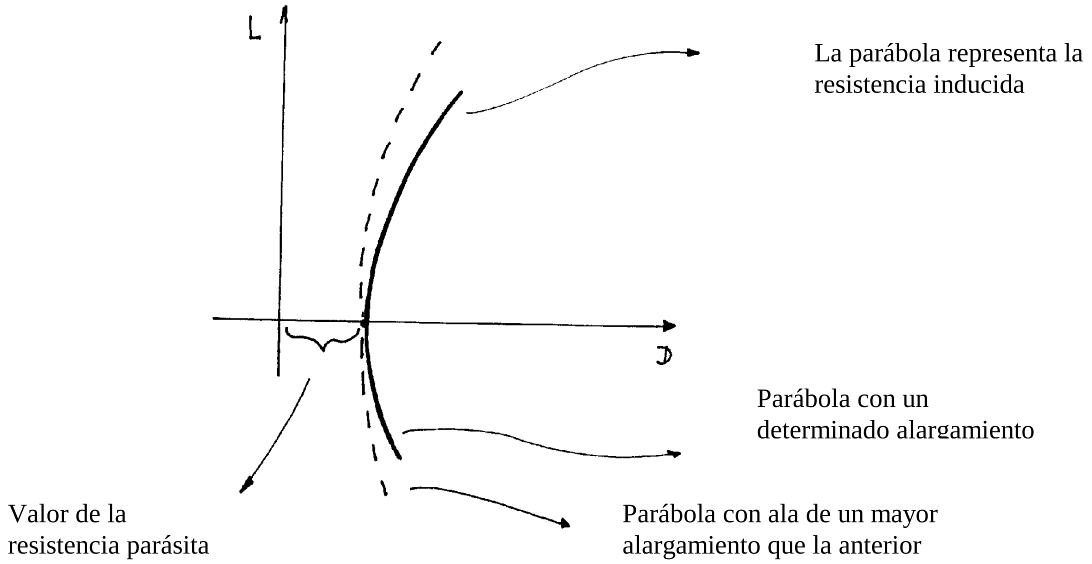
$$\text{Velocidad} = \text{calidad}.\eta.\text{potencia específica}$$

Al tratar la calidad del avión se debe considerar la resistencia al avance que se divide en dos aspectos.

1) El movimiento de todo un elemento que se desplaza dentro del medio fluido. Podría llamárselo “resistencia parásita” y será proporcional a la densidad del medio y al cuadrado de la velocidad.
2)"La resistencia inducida” producida por la sustentación del ala. Inversamente proporcional a la densidad y al cuadrado de la velocidad

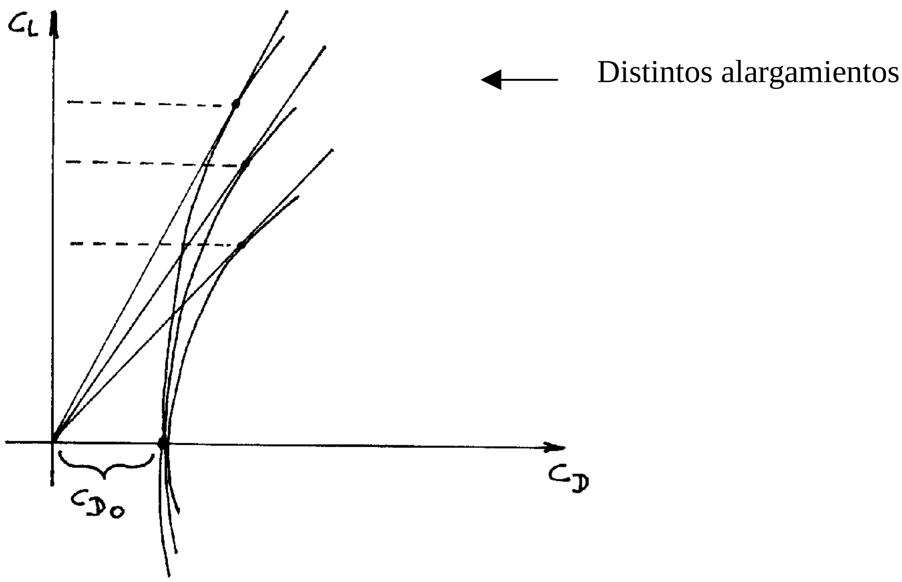
La resistencia inducida se disminuye con el alargamiento aunque la ventaja se debilita para relaciones de más de 7.

Relacionando la sustentación con la resistencia al avance de un (perfil, ala o avión) se puede trazar la llamada “polar”.



El parámetro D(paras) versus D(induc) es proporcional o varía según el alargamiento.

La parábola será más grande cuanto mayor sea el alargamiento. Siendo la eficiencia el valor de la tangente L/D, se puede obtener un valor óptimo cuando el radio vector sea tangente a la polar.



Se puede determinar un punto de la polar para una determinada velocidad y también para su carga alar:

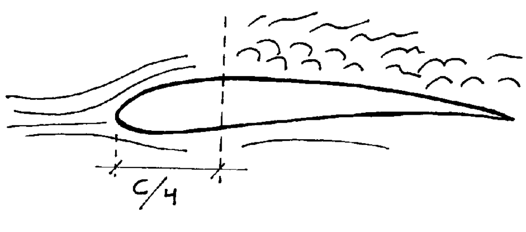
$$C_L = \frac{2.W/S}{\rho.V^2} = \frac{2.Q}{\rho.V^2}$$

Si se quiere ascender en la polar se deberá aumentar la carga alar.

La carga alar tendrá ciertos límites para el tipo de aeronave considerada.
En el aterrizaje es conveniente que el avión lo haga a la menor velocidad posible (podría ser un 10% o un 15% mayor a la de la pérdida).
De éste modo el piloto logra ejerce el gobierno el gobierno de la aeronave aún a bajas velocidades sin producir una caída en el descenso final. Esta velocidad es:

$$V_{min} = \sqrt{\frac{2.Q}{\rho.C_{L_{max}}}}$$

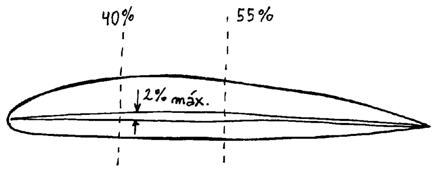
El descenso es una maniobra y no una caída. Aquí tiene importancia la carga alar en vista a las condiciones de aterrizaje.
La velocidad incide en la carrera de aterrizaje como el cuadrado de la misma ya que se debe “gastar” la fuerza de movimiento o energía cinética del avión.
Aquí cobra importancia la utilización de la hipersustentación para obtener valores de los Cl(máx) capaces de reducir dicha carrera. También el hipersustentador hace aumentar la resistencia por la que la carrera de aterrizaje disminuye.
Si la calidad disminuye hace que el avión en la trayectoria de planeo la realice con un ángulo de incidencia mayor o más “escarpado” y por lo tanto se necesitan elementos que absorban mayor energía en el tren de aterrizaje.
La RESISTENCIA: que se había visto, era parte de frotamiento, parte inducida, puede mejorarse según una serie de factores se puedan tener en cuenta.
En el perfil una resistencia es provocada por el frotamiento del fluido y la otra a la resultante de la presión.
En la capa de fluido adyacente en el intrados del perfil éste presenta diferentes conformaciones conforme se vaya desarrollando el movimiento.
En el primer aspecto la capa se desarrolla con bajas velocidades manteniéndose sobre la superficie mojada. Un cambio rápido de la velocidad relativa provoca transformaciones en el aspecto de la corriente y luego la ruptura de esta. pero continuando con lo que ocurre en el perfil, a medida que avanza el movimiento que se desarrolla por capas va aumentando de velocidad y se produce una ruptura en dicha laminaridad. Esta ruptura provoca un gasto de energía que se manifiesta en la resistencia al avance del perfil.



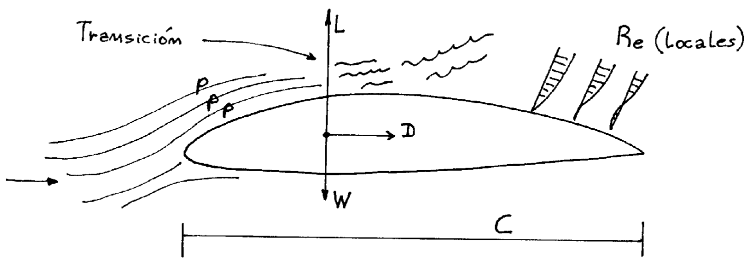
El mecanismo de la capa límite alrededor del ala no es simple, desde el borde de ataque hasta aproximadamente el primer cuarto de cuerda se forma una capa laminar que se transforma en turbulenta más estable pero con mayor resistencia.
Los estudios tienden a encontrar perfiles que mantengan una capa límite laminar durante un mayor espacio.

La característica geométrica de un perfil de condiciones laminares será:

el máximo espesor alrededor del 40% al 55% de la cuerda, con 15% de espesor máximo. La ordenada a la línea media nula o no mayor del 2% se sitúa entre el 30% al 50% de la cuerda.

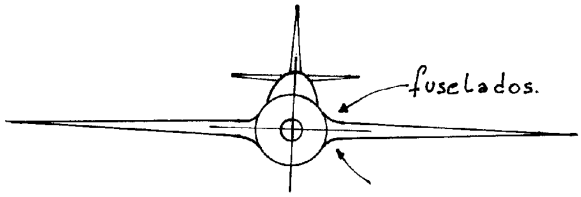


Emax. 15%



Aumenta la energía cinética.
Aumenta la cantidad de movimiento.
Aumentan las presiones hasta un 25% aproximadamente.
Disminuye el frotamiento.
Re laminar es proporcional L^1/2.
Re turbulento es proporcional a L^9/5
El mínimo de presión lo más atrás posible

Alejar del borde de ataque el gradiente de presiones positivo (presión diferida).
Con respecto al espesor de la capa límite la teoría de Prandtl establece un espesor muy reducido en la transferencia desde el régimen de movimiento viscoso en la cercanía inmediata del perfil al campo Euleriano que lo rodea.
Los problemas de mantener una menor resistencia en el ala es relativamente más fácil que para el fuselaje. la forma más apropiada para este último sería la del dirigible pero las alteraciones propias del grupo propulsor, carga, etc. hacen que esta forma se modifique.
La superficie de cola (empenaje) presentan problemas análogos a los del ala aunque siendo su relación de aproximadamente un 30% respecto a la del ala la variación de la resistencia podría ser de un 10% a un 15%.
La problemática es mayor cuando se trata de “ensamblar” las distintas partes del avión ya que ejercen influencias mutuas que perjudican el sistema.



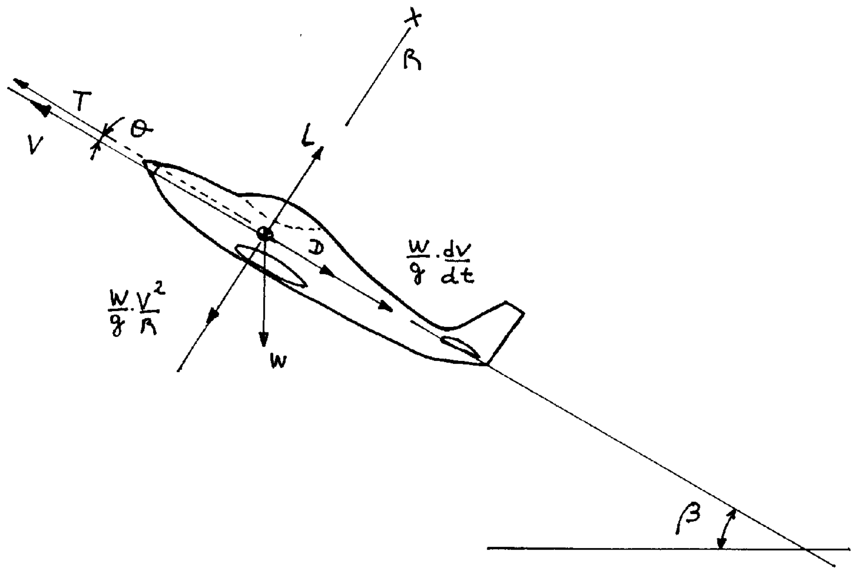
El ala media sería la de menor interferencia entre el (ala – fuselaje) contemplando que la unión de estos cuerpos estén "suavizados" por recubrimientos o partes fuseladas que produzcan el mínimo torbellino.
Sintetizando se podría establecer aproximadamente las resistencias de un avión como 45% para la inducida y un 50% a 55% para la parásita.
De esta última el 50% será para las alas y sup. de colas (empenaje), un 30 % a 35% para el fuselaje, un 6% a 10% para refrigeración y el resto para antenas , etc.

Para el desarrollo de la mecánica del vuelo se tendrán en cuenta algunas simplificaciones como que toda la sustentación es producida por el ala, que en la polar se puede establecer un CDo que sea propio de la configuración adoptada, extraído de otras experiencias y luego una vez tenida la pre – conformación del proyecto calcularlo en base a las formas diseñadas.
También que la masa de la aeronave es cte. y que el sistema se encuentra en equilibrio por estarlo los momentos respecto del C.G.
Por último el estudio del movimiento se puede asumir como si la trayectoria de la aeronave se situara en un plano vertical que coincide con el plano vertical del mismo

Mecánica de Vuelo

El estudio de la mecánica del vuelo se realiza asumiendo que la aeronave se mueve por la acción de diversas fuerzas con la hipótesis que la cuerda es constante y que el equilibrio de los momentos, respecto del baricentro. De este estudio se establecen las principales prestaciones del avión.

Situación de las fuerzas que actúan sobre la aeronave:



ρ = densidad $\left[\text{Kg.m}^{-4}.\text{seg}^{2}\right]$

L = sustentación $[\text{Kg}]$

D = resistencia $[\text{Kg}]$

W = peso $[\text{Kg}]$

g = gravedad $\left[\text{m.seg}^{-2}\right]$

V = velocidad $\left[\text{m.seg}^{-1}\right]$

R = radio de curvatura de la trayctoria $[\text{m}]$

β = ángulo e/ la trayectoria (tangente) a ésta y la horizontal

$\beta > 0$ si la trayectoria es ascendente

$\beta < 0$ si la trayectoria es descendente

S = superficie alar $\left[\text{m}^2\right]$

Ecuación de equilibrio
(Según la trayectoria y a la normal)

$$(1)\quad \begin{cases} T.\cos\theta - D - \dfrac{W}{g}.\dfrac{dV}{dt} - W.\text{sen}\beta = 0 \\ T.\text{sen}\theta + L - \dfrac{W}{g}\dfrac{V}{r^2} - W.\cos\beta = 0 \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} T.\cos\theta - \dfrac{1}{2}.\rho.V^2.S.C_D - \dfrac{W}{g}.\dot{V} - W.\text{sen}\beta = 0 \\ T.\text{sen}\theta + \dfrac{1}{2}.\rho.V^2.S.C_L - \dfrac{W}{g}.V.\dot{\beta} - W.\cos\beta = 0 \end{cases}$$

Sistemas de 2 ecuaciones diferenciales no lineales.
(Consideremos también que Cd = Cd (Cl), por la polar del avión)
El ángulo θ resulta ligado al α o de incidencia del avión. Por eso la tracción T resulta una función variable con L que no es fácil de determinar en forma simple.

Caso de vuelo estacionario

Para comenzar con el estudio de la situación y empezar a evaluar al proyecto de la aeronave, se toma al mismo en vuelo estacionario, por consiguiente sin que aparezcan fuerzas de inercia. De este modo de las ecuaciones:

$$(2)\quad \begin{cases} T.\cos\theta - \dfrac{1}{2}.\rho.V^2.S.C_D - W.\text{sen}\beta = 0 \\ T.\text{sen}\theta + \dfrac{1}{2}.\rho.V^2.S.C_L - W.\cos\beta = 0 \end{cases}$$

Aquí se asumen las siguientes hipótesis.
Sí:
$\beta = 0$ vuelo horizontal
$\beta < 0$ vuelo en picada
$\beta > 0$ vuelo en ascenso

También θ es pequeño $\therefore$ sen $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$

Esta última hipótesis será más exacta cuanto más pequeño será el ángulo α de incidencia del vuelo. Ya se verá que será más aceptable cuanto más grande sea el alargamiento alar, etc.

Además por ser θ un ángulo muy pequeño. (en el tema de estabilidad longitudinal estática se lo evalúa) del orden de +2º a –2º aproximadamente, las (2) se pueden componer de la sgte. manera:

$$(3)\qquad \begin{cases} T-\frac{1}{2}.\rho.V^2.S.C_D - W.\mathrm{sen}\beta = 0 \\ \frac{1}{2}.\rho.V^2.S.C_L - W.\cos\beta = 0 \end{cases}$$

Vuelo horizontal rectilíneo y con velocidad uniforme ($\beta = 0$)

$$(4)\qquad \begin{cases} T = \frac{1}{2}.\rho.V^2.S.C_D & (\text{tracción} = \text{resistencia}) \\ W = \frac{1}{2}.\rho.V^2.S.C_L & (\text{peso} = \text{sustentación}) \end{cases}$$

Si la masa variara (caso particular de una aeronave hidrante u otro parecido)

$$W_T = W + (Wo - \mu.t)$$

Gasto o consumo

masa del agua, por Ej.

lo que hará variar Cl en forma determinada.
Podría ocurrir que el gasto no sea lineal con el tiempo por ejemplo que la carga se realice en forma exponencial. A partir de las ecuaciones cabría un desarrollo o estudio en cuestión.
Tomando las (4) se puede evaluar la tracción necesaria para volar con una velocidad asignada:

$$C_L = \frac{2.W/S}{\rho.V^2}$$

Si V = Vcrucero, Cl = Cl (cruc)

Incorporando la polar del avión:

$$C_D = C_D.f\,(Cl)$$

se puede encontrar el valor de Cd requerido para ese Cl y obtener la resistencia o sea la tracción necesaria para el tipo de vuelo asignado.

$$C_D = \frac{2.\,T/S}{\rho.V^2}$$

En eficiencia:

$$E = \frac{L}{D} \Rightarrow \frac{D}{L} = \frac{T}{W} = \frac{1}{E}$$

$$D = T = \frac{W}{E}$$

Este valor nos permite chequear T o D conocida E como:

$$C_D = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi\lambda e}$$

CDo = son los valores que hay que evaluar pues al no tener lo forma del avión, por el momento es desconocido.
λe = alargamiento efectivo (alargamiento referido o corregido al del ala elíptica).
De ahí es que en el primer momento CDo se propondrá de acuerdo a valores de aviones similares , con datos conocidos.

Ese valor de Cdo (resistencia parásita total del avión) podrá oscilar entre 0,028 y 0,032 en aviones convencionales.
Retomando:

$$D = \frac{1}{2}.\rho.V^2.S.C_D = \frac{1}{2}.\rho.V^2.S.C_{D_O} + \frac{1}{2}.\rho.V^2.S.\frac{Cl^2}{\pi\lambda e}$$

$$D = \frac{1}{2}.\rho.V^2.S.C_{D_O} + \frac{1}{2}.\rho.V^2.S.\left(\frac{1}{\pi\lambda e}\frac{2.\,W/S}{\rho.V^2}\right)^2 \qquad \lambda_e = \frac{{b_e}^2}{S}$$

$$D = \frac{1}{2}.\rho.V^2.S.C_{D_O} + \frac{1}{\pi\frac{{b_e}^2}{S}}.\frac{\left(2.\,W/S\right)^2}{\left(\rho.V^2\right)^2}.\frac{1}{2}.\rho.V^2.S$$

$$D = \frac{1}{2}.\rho.V^2.S.C_{D_O} + \frac{1}{\pi}.\frac{1}{\frac{1}{2}.\rho.V^2}.\left(\frac{W}{b_e}\right)^2$$

$$D = A.V^2 + \frac{B}{V^2}$$

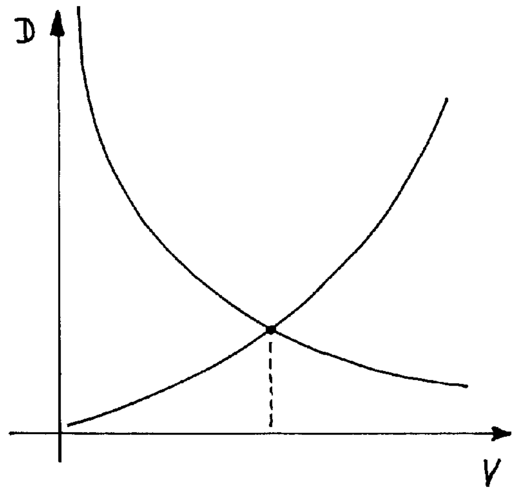
be = envergadura efectiva referida al ala elíptica
A = resistencia pasiva
B = resistencia inducida

De acuerdo a la proposición (1) de Lanchester “Para un determinado peso la resistencia total es mínima cuando las dos partes son iguales”
Aquí se presenta el punto de máxima eficiencia.
En ese caso la tracción será Tmín y V la de eficiencia máxima

$$A.V_{Emax}^2 = \frac{B}{V_{Emax}^2}$$

$$D = A.V_{Emax}^2 + A.V_{Emax}^2 = 2.A.V_{Emax}^2$$

$$Tmin = 2.A.V_{Emax}^2 = \frac{2.B}{V_{Emax}^2}$$

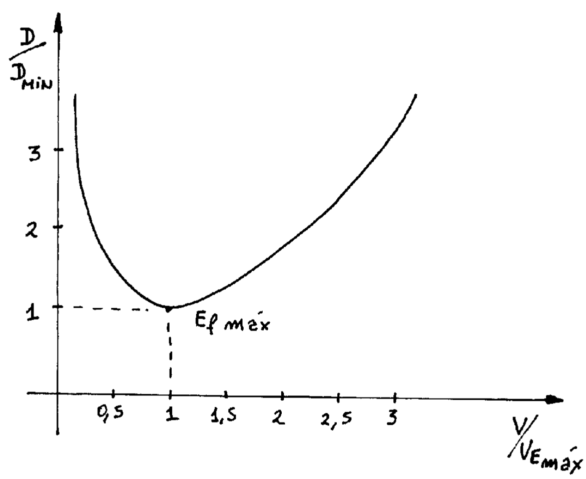


Dividiendo ambos miembros de:

$$D = T = A.V^2 + \frac{B}{V^2}$$

$$\frac{T}{T\min} = \frac{1}{2}\left(\frac{V}{V_{E\max}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{V_{E\max}}{V}\right)^2$$

Se traza el siguiente diagrama resistencia – velocidad en forma adimensionalizada:



Para la máxima eficiencia: A= B

$$C_{Do} = \frac{CL^2{}_{E\max}}{\pi.\lambda e} \quad \Rightarrow \quad \left\{ CL_{E\max} = \sqrt{C_{Do}.\pi.\lambda e} \right\}$$

$$V^2_{E\max} = \frac{2.W/S}{\rho.\sqrt{C_{Do}.\pi.\lambda e}} \quad \Rightarrow \left\{ V_{E\max} = \sqrt{\frac{2.W/S}{\rho.\sqrt{C_{Do}.\pi.\lambda e}}} \right\}$$

$$D\min = \frac{1}{2}.\rho.(V_{E\max})^2.S.C_{Do} = 2.A.V^2_{E\max}$$

$$D\min = \frac{1}{2}.\rho.\left(\sqrt{\frac{2.w/s}{\rho\sqrt{Cdo.\pi\lambda e}}} \right)^2.S.C_{Do}$$

$$D\min = \frac{2}{2}.\rho.\left(\frac{2.w/s}{\rho\sqrt{Cdo.\pi\lambda e}} \right).S.C_{Do}$$

$$D\min = 2.W.\sqrt{\frac{Cdo}{\pi\lambda e}} = T\text{mín}$$

Para el caso donde las tracción se produce por el grupo moto propulsor hélice, la potencia se puede ligar con la velocidad. Asignando un valor para el rendimiento de la hélice ηe. Estos valores están comprendidos en alrededor de 0,82 para hélices de madera o metálicas a 0,92.

$$\eta_e.Wm = T.V$$

$$\eta_e.Wm = \frac{1}{2}.\rho.V^2.S.Cd.V = \frac{1}{2}.\rho.V^3.S.Cd$$

Wm = potencia del motor

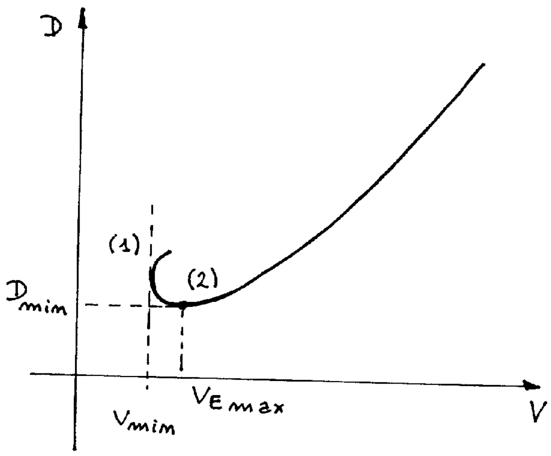
Siguiendo el procedimiento anterior multiplico por V/VE(max) a la (5).

$$\frac{V}{V_{E\max}}\frac{T}{T\min} = \frac{Wm}{Wm_{E\max}} = \frac{1}{2}\left(\frac{V}{V_{E\max}}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{V_{E\max}}{V}\right)^3$$

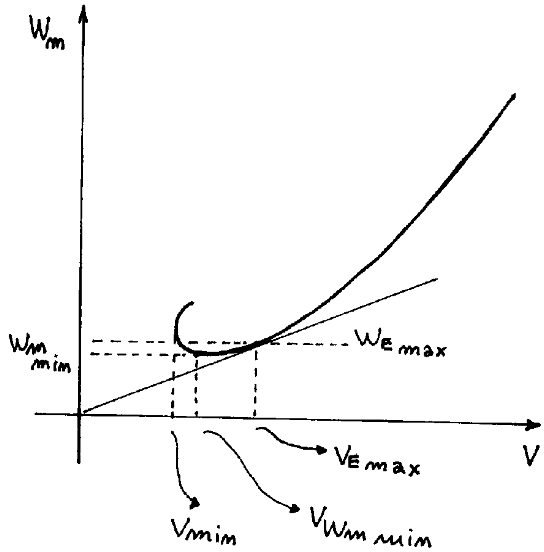
Diagrama de resistencia y de potencia necesaria para el vuelo en función de la velocidad

El diagrama o curva se construye fijando valores de velocidad a partir de la mínima estimada a iguales intervalos para cubrir el campo de velocidades que comprenda el vuelo en cuestión.

$V=\sqrt{\frac{2W/S}{\rho . C_L}}$ $\left[\frac{m}{s}\right]$	C_L	C_D	$E = C_L/C_D$	$R = \frac{W}{E}$ [Kg]	$R.V = W_m$
V_{min}	$C_{L\,máx}$	C_D p/ $C_{L\,máx}$	$E_{CL\,máx}$	$R_{CL\,máx}$	$R_{CL\,máx} . V_{min}$
V_1	C_{L1}	C_{D1}	E_1	R_1	$R_1 . V_1$
V_2					
V_3					
$V_{máx} = \frac{T/S}{1/2\,\rho\,C_{D0}}$	$C_{L\,Vmáx}$	$C_{D\,Vmáx}$	$E_{Vmáx}$	$R_{Vmáx}$	$R_{Vmáx} . V_{máx}$

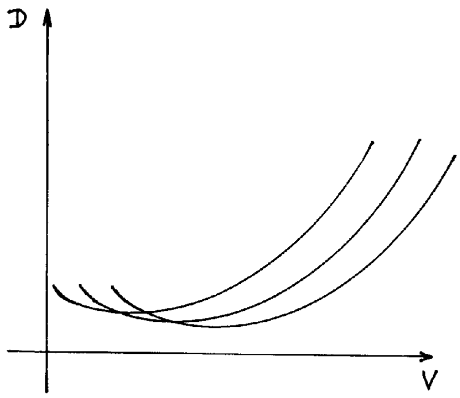


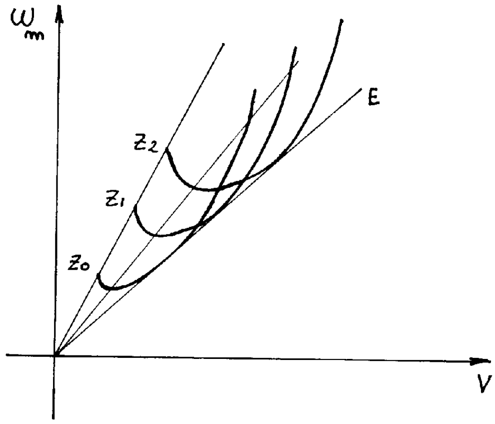
la tg a la curva en (1) es la misma velocidad del vuelo. La tg a la curva en (2) es la minima resistencia en vuelo



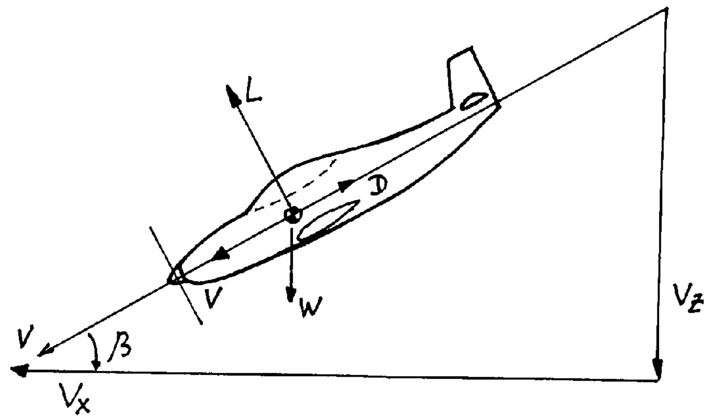
Wm/V = D condición de máxima ef. aerodinámica.

Los diagramas se deben trazar para el nivel del mar y luego para distintas cuotas. De este modo se obtendrán gráficos de las sgtes. caracteristicas.





Vuelo en descenso sin tracción



Retomando las ecuaciones (3):

$$T - \frac{1}{2}.\rho.V^2.S.C_D - W.\text{sen}\beta = 0$$

$$\frac{1}{2}.\rho.V^2.S.C_L - W.\cos\beta = 0$$

Las dos ecuaciones se reducen a:

$$\frac{1}{2}.\rho.V^2.S.C_D = -W.\text{sen}\beta$$

$$\frac{1}{2}.\rho.V^2.S.C_L = W.\cos\beta$$

$\beta < 0$

El equilibrio de W lo produce L y D

$$\begin{cases} V_Z = -V.\operatorname{sen}\beta & \Rightarrow \quad \mathrm{W}.V_Z = \dfrac{1}{2}.\rho.V^3.S.C_D \\ V_X = V.\cos\beta & \Rightarrow \quad \mathrm{W}.V_X = \dfrac{1}{2}.\rho.V^3.S.C_L \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} V_Z = \dfrac{1}{2}.\rho.\dfrac{V^2}{W}.S.C_D \\ V_X = \dfrac{1}{2}.\rho.\dfrac{V^2}{W}.S.C_L \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{Vx}{Vz} = \frac{C_L}{C_D} = E = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$$

Relación de vuelo horizontal y descenso, pone en forma explícita la relación de planeo que es función solo de la polar del avión.
La eficiencia máxima:

$$C_{D_{E\max}} = 2.C_{Do} \qquad \mathrm{C_D} = C_{Do} + \frac{C_L^2}{\pi.\lambda e}$$

$$C_{L_{E\max}} = \sqrt{C_{Do}.\pi.\lambda e} \qquad \mathrm{C_{D_{Emax}}} = C_{Do} + \frac{\left(\sqrt{C_{Do}.\pi.\lambda e}\right)^2}{\pi.\lambda e} = 2.C_{Do}$$

$$E\max = \frac{C_{L_{E\max}}}{\mathrm{C_{D_{Emax}}}} = \frac{\sqrt{C_{Do}.\pi.\lambda e}}{2.C_{Do}}$$

$$E\max = \frac{1}{2}.\sqrt{\frac{\pi.\lambda e}{C_{Do}}}$$

Mientras Cd(Emax) no depende del alargamiento, Cl(Emax) crece con la raiz cuadrada de este. Un elevado alargamiento es útil para obtener buena eficiencia por lo que permite volar con un alto valor de Cl, sin que tenga una elevada resistencia inducida.
Para la velocidad de descenso, se calcula de la sgte. manera:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{-Vz}{V} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{\mathrm{Vx}}{V} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{E^2}}} = \frac{E}{\sqrt{E^2+1}}$$

Como:

$$\frac{1}{2}.\rho.V^2.S.C_D = W.\frac{Vz}{V}$$

$$\frac{1}{2}.\rho.V^2.S.C_L = W.\frac{Vx}{V} = W.\frac{E}{\sqrt{E^2+1}}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}.\rho.V^3.S.C_D = W.Vz \\ &\frac{1}{2}.\rho.V^3.S.C_L\frac{\sqrt{E^2+1}}{E} = W \end{aligned}\right\}$$

Elevando al cuadrado la primero y al cubo la segunda

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{1}{2}.\rho\right)^2.V^6.S^2.C_D{}^2 = W^2.Vz^2 \\ &\left(\frac{1}{2}.\rho\right)^3.V^9.S^3.C_L{}^3\left(\frac{\sqrt{E^2+1}}{E}\right)^3 = W^3 \end{aligned}\right\}$$

Dividiendo miembro a miembro

$$\frac{Vz^2}{W} = \frac{\left(\frac{E}{\sqrt{E^2+1}}\right)^3.C_D{}^2}{\frac{1}{2}.\rho.S.C_L{}^3} \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{C_D{}^2}{C_L{}^2}\right)\frac{1}{C_L}\frac{W/S}{\frac{1}{2}.\rho}.\left(\frac{E}{\sqrt{E^2+1}}\right)^3}$$

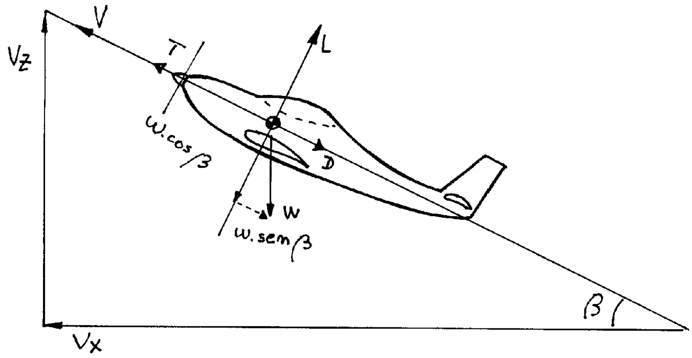
$$Vz = \frac{1}{E.\sqrt{C_L}}.\sqrt{\frac{2.W/S}{\rho}}.\sqrt{\left(\frac{E}{\sqrt{E^2+1}}\right)^3}$$

Cuanto más alto es el valor de:

$$E.\sqrt{C_L}$$

más baja es la velocidad de descenso. También cuanto más baja sea la carga alar y mayor la densidad.

Vuelo en despegue



Retomando las ecuaciones (3):

$$T - \frac{1}{2}.\rho.V^2.S.C_D - W.\text{sen}\beta = 0$$

$$\frac{1}{2}.\rho.V^2.S.C_L - W.\cos\beta = 0$$

Vuelo rectilíneo uniforme donde la fuerza de tracción supera a la resistencia.
En el balance energético la disponibilidad de una mayor potencia (tracción) que supera a la resistencia aerodinámica, se traduce en un aumento de la energía potencial de la aeronave incrementando su trayectoria ascendente.
La velocidad de vuelo para un determinado valor de la carga alar y de la densidad será función del coeficiente de sustentación y de la velocidad ascencional del exceso de potencia, o sea de la tracción del grupo motor hélice.

$$\text{sen}\beta = \frac{Vz}{V} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{Vx}{V}$$

$$T = \frac{1}{2}.\rho.V^2.S.C_D + W.\frac{Vz}{V} \Rightarrow \text{multipl por V} \Rightarrow$$

$$T.V = \frac{1}{2}.\rho.V^3.S.C_D + W.Vz$$

$$\frac{1}{2}.\rho.V^2.S.C_L = W.\frac{Vx}{V} \;\Rightarrow\; C_L = \frac{2.W/S}{\rho.V^2}.\frac{Vx}{V}$$

De aquí se observa que el Cl para el despegue es menor que el de crucero ya que:
Vx < V.

$$T.V = \eta_e.W_m$$

Si se despeja la velocidad:

$$V = \sqrt{\frac{2.W/S}{\rho.Cl}}.\sqrt{\cos\beta}$$

Se puede asignar un valor Vo, que será la velocidad para el vuelo horizontal para un Cl de crucero:

$$V = Vo.\sqrt{\cos\beta}$$

Sustituyendo:

$$T.V = \eta_e.W_m = \frac{1}{2}.\rho.V_o^3.S.\cos\beta^{3/2}.Cd + W.Vz$$

$$Vz = \frac{1}{W}.\left[\eta_e.W_m - Wo.\cos\beta^{3/2}\right]$$

$$Vz = \frac{\eta_e.W_m - Wo.\cos\beta^{3/2}}{W}$$

El ángulo de rampa o despegue es de

$$\beta = 10^{o}$$

Por lo que se puede tomar:

$$\cos\beta^{3/2} \cong 1$$

Donde el aumento de Vz resulta del exceso de potencia Wm.

$$Vz = \frac{\eta_e.W_m - Wo.}{W}$$

Bibliografía

[1] Airplane Performance Stability and Control – Perkins and Hage – 1949.

[2] Synthesis of Subsonic Airplane Design – E.Torenbeek – 1982.

[3] Airplane Aerodynamics and Performance – J.Roskam and Chuan-Tau Edward Lan – 1997.